Universidade de Lisboa

As dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo gráficos de funções afins no 8.ºano de escolaridade

Ana Alexandra Gonçalves José

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo
Professor Doutor Henrique Guimarães e
Professor Doutor José Francisco Rodrigues

2015

Universidade de Lisboa

As dificuldades dos alunos em tarefas envolvendo gráficos de funções afins no 8.ºano de escolaridade

Ana Alexandra Gonçalves José

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo
Professor Doutor Henrique Guimarães e
Professor Doutor José Francisco Rodrigues

2015

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus orientadores Professor Henrique Guimarães e Professor José Francisco Rodrigues, pelos esclarecimentos e pelo que me ensinaram ao longo deste percurso. Aprender com quem sabe o que é ensinar fez de mim, uma professora mais atenta, rigorosa e preocupada com a aprendizagem dos meus alunos.

Agradeço especialmente à Professora Helena Fonseca, por todo o trabalho realizado ao longo deste ano, pela disponibilidade incansável, pela dedicação e pela amizade em tantos momentos partilhados. Alguém que sem dar 'lições' nos ensina o que é ser professor e como podemos sempre melhorar. Tudo o que escreva nunca vai demonstrar a minha gratidão.

Agradeço aos professores do mestrado, que tanto me ajudaram nas suas aulas e por vezes fora delas. Foram várias as vezes em que pude recorrer a tudo o que me ensinaram, dentro e fora da sala de aula.

Não posso deixar de agradecer à Helena Martins pelo companheirismo de tantos anos de faculdade e amizade. Obrigada pelas noites loucas de trabalho, pelas gargalhadas, quando nada fazia sentido e pelos conselhos em momentos oportunos.

Agradeço muito à minha família. Mãe por me levantares cada vez que caí e porque és a pessoas mais forte que conheço. Pai, pelo mau feitio que me deste e por me entenderes, mesmo quando achas que estou errada, sem vocês não seria possível. Mano vais ser sempre o meu 'Herói' e o 'Barãozinho' lá de casa, à Beatriz a sobrinha mais amada do Mundo, ao Avô Lopes por tudo o que me ensinaste, à Avó Constância por ficares comigo, quando a mãe e o pai não podiam e à Tia Glória pelo lema 'quem não tem cão caça com gato'. Obrigada ainda, à Manuel, ao Netó e à Rita, pelo apoio e pelo carinho.

Obrigada aos amigos 'BNA', oito anos de amizade é uma grande caminhada, em especial, ao Gonçalo e ao Pedro Pereira pelo carinho e ajuda em tantos momentos difíceis.

Muito, muito obrigada a ti, Filipe, pelos oito anos de partilha nas alegrias e tristezas, pela paciência e por seres o melhor namorado do Mundo.

Por fim, obrigada à Professora Isabel, da Escola Secundária D. Luísa de Gusmão, pelo carinho diário neste ano letivo, à Professora Helena Pinho por toda a ajuda para este trabalho. Aos meus alunos, que estarão sempre no meu coração, pela preocupação, pela ajuda e pelo esforço sempre presente, para que tudo fosse possível dentro das nossas aulas.

Resumo

Este relatório foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, a partir de um estudo sobre prática letiva supervisionada, no ano de 2014/15. Incidiu no domínio de Funções, Sequências e Sucessões, no tema acerca de Gráficos de Funções Afins, trabalhando com uma turma de 8.º ano de escolaridade da E. S. D. Luísa de Gusmão.

Tem como objetivo compreender as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins. Procurei compreender que estratégias os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvem gráficos desse tipo de funções, que dificuldades revelam na construção e interpretação desses gráficos e, que dificuldades evidenciam na representação algébrica de gráficos de funções afins.

Baseada numa metodologia qualitativa, utilizei como instrumentos na recolha de dados a observação de aulas com apoio de gravação áudio, a análise documental, e a realização de entrevistas semiestruturadas a cinco alunos da turma. As aulas e as tarefas realizadas com os alunos contemplaram exercícios, problemas e explorações. Os alunos foram avaliados recorrendo à observação e questionamento durante as aulas, à análise das suas produções escritas dentro e fora da sala de aula e através de uma Questão de aula.

A análise dos dados evidencia que os alunos recorrem a estratégias gráficas e algébricas na resolução de tarefas acerca de gráficos de funções afins. Há evidência de dificuldades na construção e interpretação de gráficos dessas funções, por exemplo, na escolha de escalas, na identificação de eixos, na marcação de pontos e no próprio traçado do gráfico. Evidenciaram-se também dificuldades no cálculo do declive de uma reta a partir dos gráficos.

Nas representações algébricas os alunos têm dificuldades na sua construção e análise, nomeadamente, na identificação do declive e na determinação da ordenada na origem de uma reta. Manifestaram ainda dificuldades na transição entre diferentes tipos de representações.

Palavras-chave: Funções, Estratégias dos alunos, Dificuldades dos alunos, Representação gráfica, Representação algébrica.

Abstract

This thesis was developed within the scope of the Masters in Teaching Mathematics and is based on the study of the supervised practical lectures for the year 2014/15. The study used an 8th-year class from *E.S.D Luísa Gusmão* and focused on the subjects of Functions, Sequences and Successions, Affine Functions Graphics.

The objective is to understand the students’ main difficulties while solving problems that covered the subject of affine functions. I have tried to understand the types of problem-solving strategies that students use to interpret and solve affine function graphics, graphic plotting and in the algebraic representation of affine function plots.

Based on a qualitative methodology, I have used the observation of classes, audio recordings, document output analysis and semi-structured interviews with five students. The tasks performed in the classes were focused on problem-solving exercises and coursework exploration. The students were evaluated using observation and interrogation during classes, the analysis of written outputs and a *Questão de aula*.

The results data analysis shows that students use graphic and algebraic approaches in their problem-solving strategies when presented with affine function problems. Difficulties were observed when constructing and understanding the affine function plots, for instance, on the axis scale, axis identification, plotting data points and plotting the function lines. Other difficulties were also observed in computing the slope of functions using a graphical approach.

In the algebraic representations, the students showed difficulties in their construction and analysis, namely, identifying the slope and the y-intercept of the function. Furthermore, they showed difficulties in the transitions between the different types of representations.

Keywords: Functions, Problem solving strategies by students, Learning difficulties, Graphical representation, Algebraic representation.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

1 - Introdução

Objetivo e questões de estudo

Este trabalho foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, como relatório da prática de ensino supervisionada. O estudo apresentado foi concretizado no 3.º período do ano letivo 2014/2015, durante a lecionação de 14 aulas, 7 blocos de 100 minutos no domínio das funções, sequências e sucessões, na unidade gráficos de funções afins, da disciplina de Matemática, no 8.º ano de escolaridade. A turma onde o estudo decorreu tem 24 alunos e pertence à Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.

Após alguma reflexão e da análise da planificação anual da disciplina de Matemática do 8.º ano optei por escolher o tema dos gráficos de funções afins devido às dificuldades que os alunos manifestam na sua aprendizagem. Achei que seria um desafio interessante, trabalhar um tema que levanta problemas aos alunos e, que nos remete para a nossa conhecida Álgebra que tantas dores de cabeça dá, a professores e alunos.

A escolha desta unidade prende-se também com a importância das funções, no currículo da Matemática e no futuro percurso escolar dos alunos. Deve-se, ainda, ao destaque dado às funções no programa da Matemática de 2013, onde as funções passam a ter um domínio próprio, bem como às conexões que podemos estabelecer entre as funções e as situações do mundo real, o que poderá ajudar os alunos na sua vida quotidiana futura, como nos diz o programa:

> "*A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução.*". (M.E., 2013).

Na disciplina de Matemática, pretende-se desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no mundo real, desenvolver a capacidade de formular conjeturas, resolver problemas, comunicar matematicamente, estimular a memória, o rigor e o espírito crítico. O estudo dos gráficos de funções afins tem potencialidades para proporcionar muitas destas situações aos alunos, permitindo-lhes aprender a lidar com as funções de modo mais aprofundado, dando-lhes a oportunidade de perceber quais as suas dificuldades, para que as mesmas pudessem assim ser superadas. Não devemos esquecer que esta unidade contempla a abordagem de diversas formas de representação de uma função, algébrica, gráfica e numérica, e ainda a compreensão de como mudamos de uma representação para outra. Esta forma de trabalhar as funções é ainda fortemente encorajada nas normas NCTM (2007), onde, de acordo com as normas para a álgebra:

"*os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e as desvantagens de cada forma de representação, consoante os objetivos em causa. À medida que trabalham com as representações múltiplas de funções (...) irão desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções.*" (citado por Loureiro, 2013).

A compreensão do conceito de função ajuda os alunos a serem capazes de o usar em diferentes situações. O trabalho com as diferentes representações contribui para essa compreensão e ajuda os alunos a interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos, a resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos. (M.E., 2007).

Pretendo deste modo, com este trabalho compreender as dificuldades que os alunos têm na aprendizagem dos diferentes tipos de representações de funções, não esquecendo a importância deste tema no currículo da matemática e no futuro dos alunos e ainda as estratégias que utilizam. Procurarei o estabelecimento de conexões com outros domínios da Matemática, promovendo no aluno uma aprendizagem mais esclarecida acerca deste tema, bem como a interiorização e compreensão do efeito da variação dos parâmetros nas funções lineares e afins.

Nesta linha de pensamento, defini como objetivo para o meu estudo compreender as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins no 8.ºano e para tal estabeleci as seguintes questões:

- Que estratégias os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins?
- Que dificuldades revelam os alunos na construção e interpretação de gráficos de funções afins?
- Que dificuldades evidenciam os alunos na representação algébrica de funções afins a partir da representação gráfica?

Motivações pessoais

Este trabalho simboliza o fim de um ciclo da minha vida e, ao mesmo tempo, o início de outro, muito desejado. Sempre desejei ser professora, inicialmente sem saber de que área disciplinar, mas mais tarde de forma inconsciente já me perdia na matemática, nos seus algoritmos e métodos. Mas foi num curso de Economia, nas aulas de Análise Matemática I que percebi o que gostaria de fazer. Assim, com ajuda da professora desta disciplina iniciei esta viagem, com problemas, percalços, paragens mas acima de tudo com muita coragem e muita persistência.

Este mestrado permitiu-me realizar o meu sonho de dar aulas, com a consciência da importância do trabalho do professor, das consequências que o meu desempenho pode ter, da necessidade de planear muito bem o que vou trabalhar nas aulas, e de perceber, ao refletir depois de uma aula, que podemos sempre fazer melhor, e que se não foi nesta aula, será no futuro. Este é um dos fascínios de ser professor, o facto de estarmos sempre a aprender, a oportunidade de uma carreira repleta de aprendizagem e todo um conjunto de novos saberes a interiorizar, refletir e aplicar numa viagem cheia de incertezas. Este estudo permitiu-me compreender com maior profundidade o que é ser professor, o que é a prática letiva e todas as implicações que esta nos traz.

Hoje lembro-me das aulas do primeiro ano do mestrado e vejo-as com outros olhos. Muitas vezes tínhamos dúvidas e discutíamos entre colegas. Durante a experiência letiva que culminou na escrita deste relatório, algumas dessas dúvidas tornaram-se problemas do quotidiano, experiências em sala de aula, que me fizeram aprender com os meus alunos e com a minha orientadora cooperante.

A escolha das funções, além ter sido feita tendo em conta a planificação anual e o período em que se daria a minha lecionação prende-se ainda com um gosto pessoal. As funções sempre foram um domínio que me dava prazer apreender e ensinar. Foi no prazer de ensinar, que surgiu, a vontade de estudar as dificuldades dos alunos. Mesmo tendo em conta o carácter abstrato das funções, havia algo mais por trás que achei que deveria compreender. A abstração é uma questão problemática, mas além desta, tinham de existir outras dificuldades. Assim, penso que a identificação destas dificuldades e a sua compreensão para procurar formas de agir em aula, de forma a que os alunos as ultrapassem, pode ajudar-me a melhorar a minha prática letiva, bem como, a de outros professores ou futuros professores, que se dediquem a esta questão.

Organização do relatório

Ao elaborar este relatório, tive por base o documento oficial das 'Orientações para o desenvolvimento e elaboração do relatório da prática de ensino supervisionada' (disponível em http://www.ie.ulisboa.pt) e ainda alguma bibliografia.

Assim, tendo em conta o referido documento, comecei por escrever, no primeiro capítulo a introdução, onde incluo o objetivo e as questões do estudo, apresentando as principais motivações que me levaram a escolher a unidade de ensino e a problemática do trabalho.

No segundo capítulo apresento o enquadramento didático e curricular do meu estudo, onde realizo uma revisão de literatura, baseada em documentos programáticos e autores de referência que abordam o tema das funções.

O terceiro capítulo começa com uma breve caracterização do contexto escolar e da turma onde teve lugar a minha intervenção letiva, centrando-se depois na caracterização da unidade de ensino, no que se refere à sua planificação e lecionação, e aos instrumentos para recolha de informação sobre o trabalho e aprendizagens dos alunos.

O quarto capítulo dedica-se à apresentação e análise dos dados, orientada sempre pelas questões que elaborei para este estudo. E finalmente considerações finais, onde se encontram as conclusões e a reflexão final sobre o estudo realizado.

2 - Enquadramento Curricular e Didático

Segundo o programa de matemática para o ensino básico de 2007, considera-se indispensável a compreensão das diferentes representações (gráfica, algébrica e numérica), pois auxilia os alunos a interpretar e representar situações em contextos diversos recorrendo a linguagem e a procedimentos algébricos. Assim, as diferentes representações ajudam os alunos a interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos, a resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos. A compreensão do conceito de função, ajuda os alunos a serem capazes de o usar em diferentes situações (M. E., 2007).

Segundo Freudedenthal (1991), a realidade é o que é experienciado pelos alunos, incluindo assim situações puramente matemáticas e também situações em contexto real. Este é um doa apelos do programa de matemática de 2013 para o estudo de funções, que seja incluídos uma variedade de situações de modo a que os alunos as compreendam para que lhes atribuam significados através do contacto com diversos contextos. O contacto com a diversidade de contextos vai permitir aos alunos a realização de conexões matemáticas, que são importantes para a interiorização dos conceitos e da capacidade de fazer matemática, que os alunos terão de mobilizar para a resolução de problemas.

Já no programa de matemática de 2013, as funções ganham maior destaque, saindo do tema da Álgebra e tendo um domínio próprio, onde o apelo à diversidade de representações e às situações contextualizadas se pode encontrar, apelando a que na matemática é indispensável, uma compreensão adequada de fenómenos do mundo que rodeia os alunos, através da modelação de sistemas para ajudar a prever o seu comportamento e evolução. Deve ainda, ter-se em conta que, o grau de complexidade das estratégias escolhidas pelos alunos deverá ser crescente, podendo estes iniciar o seu estudo com abordagens informais, através da representação por esquemas, diagramas e tabelas, mas o professor deve conduzir os alunos para processos mais formais e métodos sistemáticos (M. E., 2013).

O conceito de função

O conceito de função tal como o conhecemos nos nossos dias, é fruto de um longo caminho de desenvolvimento do pensamento matemático. Muitos foram os que contribuíram nesta longa caminhada, segundo Youschkevitch (1981), o desenvolvimento do conceito de função deu-se me três etapas: a Antiguidade, a Idade Média e o Período Moderno.

Na Antiguidade ainda não existia o conceito de função, mas sim o estudo de casos de dependência ou relação entre duas quantidades. Na Idade Média, esta dependência entre quantidades era definida de modo verbal ou através de um gráfico mais do que através da sua representação algébrica. Uma contribuição no desenvolvimento da representação gráfica de função foi feita, na Universidade de Paris, por Nicolau de Oresme que representou num eixo a velocidade e no outro o tempo de deslocação, para representar a deslocação de um objeto que se move com aceleração constante. Mesmo tendo denominado as coordenadas por latitude e longitude, o seu sistema é pioneiro na representação gráfica de funções (Youschkevitch, 1981, citado por Fonseca, Santos e Nunes).

É então, com o Período Moderno a partir do século XVI, que a representação algébrica de funções ganham terreno, tornando assim as funções num campo analítico a explorar. O primeiro grande desenvolvimento do conceito de função foi feito por François Viète, este introduziu o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para a representação das constantes, originando assim a primeira equação algébrica. Mas esta não é a forma como escrevemos as nossas equações, nos nossos dias, pois esse modo de representação foi introduzido por Descartes, que convencionou que as primeiras letras do alfabeto simbolizariam constantes e as últimas representariam variáveis (Youschkevitch, 1981, citado por Fonseca, Santos e Nunes).

Descartes introduziu ainda a utilização de um sistema de eixos para localizar pontos e representar graficamente equações. Mas o nosso conhecido sistema de coordenadas, atualmente conhecido como plano cartesiano, surge pela sua resolução dada ao problema de Pappus, que é considerado a base do desenvolvimento da Geometria Analítica. Mas é Leibniz que utiliza pela primeira vez a palavra “função”, para designar “um segmento de reta cujo comprimento depende da posição que ocupa um certo ponto sobre uma curva dada”, introduz ainda os termos variável, constante e parâmetro (Youschkevitch, 1981, citado por Fonseca, Santos e Nunes).

Por fim, Leonard Euler contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função definindo-o na sua publicação, em 1748, “Introductio in analysin infinitorum”. Este matemático é também o responsável por importantes notações matemáticas, como $f(x)$ para denotar a função f de x (Youschkevitch, 1981, citado por Fonseca, Santos e Nunes).

A matemática que ensinamos hoje aos nossos alunos é fruto de séculos de desenvolvimento e a noção de função é semelhante à apresentada por Dirichilet em 1837. Assim, uma " função $f: A \rightarrow B$ consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B e uma regra que associa a cada elemento x de A (objeto) um e um só elemento y de B(imagem). Logo a função está definida em A com valores em B" (Teixeira et al, 1997, citado por Loureiro 2013, p.5).

Diferentes tipos de representação de uma função

Sabe-se que, é necessário para o ensino das funções, que os alunos tenham contato com as diferentes formas de representação, gráfica, algébrica e numérica. Mas tão importante, quanto o facto de os alunos conhecerem e compreenderem estes três tipos de representação é a compreensão de como se articulam os diferentes tipos de representações entre si (Ponte, 1990).

Dada a importância das funções, segundo Ponte, Branco e Matos, a sua aprendizagem é ser preparada desde os primeiros anos. As sequências com que os alunos trabalham, nos 1.º e 2.º ciclos representam funções de variável natural, em que a cada número corresponde um termo. São ainda de referir as situações trabalhadas com os alunos, no domínio da Organização e Tratamento de Dados, nomeadamente o trabalho com correspondências entre duas variáveis que são representadas através de tabelas, diagramas e gráficos. Assim os alunos estão já em contacto com os tipos de representações das funções, sem que lhes seja feita qualquer referência a estas (Ponte, Branco, Matos, 2009).

Os alunos chegam ao 3.º ciclo, com dificuldades em construir representações, por isso o ensino das funções deve articular as três tipos de representação: numérico, gráfico e algébrico. Deve ser dada a oportunidade aos alunos de construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido quantitativo, adquirir a noção do que são aproximações aceitáveis ou não para desenvolver as suas competências matemáticas de modo consistente. É ainda importante aplicar estas situações a diversos tipos de contextos. A interpretação e análise gráfica, relacionando-a com problemas de variação e com o modo como essas variações ocorrem. As representações gráficas promovem nos alunos, de forma muito forte, o desenvolvimento da sua intuição matemática (Ponte, 1990).

O trabalho com as representações algébricas de funções é fundamental, pois os alunos necessitam de conseguir manipular as expressões e compreender o seu significado face a contextos concretos. O estudo das representações algébricas deve desenvolver-se de forma sistemática a partir de representações gráficas e numéricas. O conceito de função associa três aspetos fundamentais da matemática: as representações algébricas, as representações gráficas e a ligação com a realidade (tudo o que se pode contar ou medir pode ser representado através de uma função) (Ponte, 1990).

De acordo com as normas para a álgebra, NCTM, é importante que os alunos tenham a capacidade de compreender as relações entre os diferentes tipos de representação, gráficos, tabelas e símbolos e avaliar as vantagens e desvantagens de cada uma, de acordo com os objetivos em causa. O desenvolvimento de um conhecimento mais profundo e sólido das funções irá ser atingido à medida que os alunos trabalham as diferentes representações de funções (NCTM, 2007 citado por Loureiro, 2013).

Ponte identifica ainda, num estudo algumas estratégias e dificuldades dos alunos relativamente à construção e interpretação de gráficos cartesianos e ainda na análise das relações funcionais presentes nesses processos. (Ponte, 1984, citado por Loureio, 2013) Este autor, considera ainda num outro estudo que o ensino das funções deve articular de modo equilibrado vários tipos de representação (numérica, gráfica e algébrica) e sugere ainda, que numa fase inicial é importante recorrer a exemplos em que exista uma expressão algébrica ou regra simples que estabeleça uma correspondência entre conjuntos numéricos. Defende ainda, que o estudo de funções a partir dos seus gráficos contribui para uma aprendizagem mais profunda e que o estudo analítico das funções deve surgir apoiado em atividades sistematicamente realizadas a partir da representação numérica e da representação gráfica (Ponte, 1992, citado por Loureiro, 2013).

Segundo Matos, a análise e interpretação de diversos tipos de representações de uma função, assim como a conexão entre eles, identificando as vantagens e desvantagens de cada uma é extremamente importante. O autor diz-nos ainda que as funções são um tópico de importância fulcral para a matemática, dado ser central na conceção e no estudo de modelos que podem ajudar na previsão de situações

(Mateus, 2013). Também Friedland e Tabach (2001), atribuem grande importância ao trabalho com vários tipos de representações, pois pensam que permite eliminar as limi8tações de cada um dos tipos de representação tornando a aprendizagem da Álgebra mais significativa e efetiva. (Friedland ,Tabach, 2001 citado por Loureiro, 2013)

Para Duval, a diversidade das representações confere significado ao objeto matemático, dado que nenhuma delas consegue descrevê-lo completamente, mas todas representam e descrevem diferentes aspetos desse mesmo objeto. O autor defende ainda, que a aprendizagem de um conceito ocorre quando o aluno consegue articular vários registos de representação, uma vez que o tratamento e a conversão entre diferentes registos de representação semiótica constituem uma condição necessária para a apropriação dos objetos matemáticos. (Duval, 1995, citado por Almeida& Oliveira, 2009). Ainda, na perspectiva de Duval, a comunicação matemática estabelece-se com base em representações., logo é fundamental para o processo de aprendizagem, que os alunos consigam distinguir o objeto representado da sua representação. No que respeita à transformação de representações, Duval defende que para compreender as dificuldades de é necessário distinguir dois tipos de transformações, o tratamento e a conversão. O primeiro prende-se com as transformações de representações que ocorrem dentro do mesmo tipo, como por exemplo simplificação de expressões algébricas. Já as conversões prendem-se com transformações entre diferentes tipos de representação. (Duval, 2006, citado por Loureiro, 2013)

Para Leinhardt et al, a construção do gráfico a partir da expressão algébrica é uma série de passos diretos, que começam com a identificação de pares ordenados, em seguida a representação destes num referencial cartesiano e, por fim o traçar de uma linha que passe pelos pontos assinalados. Já no que respeita à passagem do gráfico para a expressão algébrica, é uma questão muito mais complexa devido à necessidade de identificar padrões. (Leinhardt et al, 1990, citado por Loureiro, 2013)

Finalmente, Doorman et al., dizem que as vantagens de existirem diversas formas de encarar as funções, faz com que ensinar este conceito aos alunos seja um desafio pedagógico. Podendo o ensino das funções ter um caráter operacional, nos primeiros anos, e estrutural a longo prazo, prendendo-se com a abstração que carateriza a construção de objetos matemáticos. (Doorman et al, 2012, citados por Mateus, 2013)

Segundo esta perspetiva ficamos assim a compreender, de uma forma mais profunda e esclarecida a importância das funções e das suas representações. Ficamos assim a perceber a potencialidade da aprendizagem dos diversos tipos de representações e as vantagens e desenvolvimentos que estas trarão ao aprofundar o estudo de funções. Por todos estes motivos, devemos partir do conceito ainda pouco interiorizado de função, presente nos alunos e mostrar-lhes as potencialidades das conexões entre este conceito e os seus diversos tipos de representações, tentando fazê-lo através da compreensão do conceito, das formas como se representa e das conexões entre as diferentes representações, bem como a sua ligação ao seu quotidiano, tudo isto através de explorações, problemas e das discussões em grupo.

As funções e o pensamento algébrico

Segundo Kaput, a dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as várias representações constituiu um obstáculo ao estudo das funções e defende a realização de tarefas que envolvam diversos sistemas de representações (Kaput, 1999 citado por Loureiro, 2013). O autor defende ainda, tal como o programa de matemática de 2013, que os professores devem criar ambientes de sala de aula que possibilitem a todos os alunos aprender com compreensão, sugerindo começar a trabalhar aspetos algébricos desde cedo; partindo do conhecimento informal dos alunos; integrando a aprendizagem da Álgebra com a de outros assuntos, de modo a evidenciar o valor desta área da matemática explorando diferentes tipos de pensamento algébrico, dando condições para que os alunos desenvolvam naturalmente o seu conhecimento matemático e articulando-o com as suas experiências. Podemos perceber, ainda, a importância do conceito de função, para o autor, para quem a noção de função tem origem no senso de crescimento e variação, onde uma quantidade varia em conjunto com outra. Aglutinam-se assim, uma grande diversidade de análises desta única entidade, um gráfico, uma tabela, uma lista (Kaput, 1999 citado por Mateus, 2013).

De acordo ainda com Ponte, Branco e Matos, o estudo das funções assume um papel de destaque no programa 3.º ciclo, pois tenta compreender a noção de função, como uma relação entre variáveis, bem como a capacidade de usá-la na resolução de problemas reais através da modelação de situações do dia-a-dia. Segundo Bento de Jesus Caraça (1958), o desenvolvimento desta noção relaciona-se com o facto de ser uma mais-valia no estudo de diversos fenómenos naturais e fenómenos que resultam da ação humana, sendo nos nossos dias aplicado em áreas como a engenharia, economia, administração e outras.

No 3.°ciclo estudam-se diferentes tipos de funções, as afins, as lineares e não lineares, as de proporcionalidade inversa e as quadráticas, bem como as diferentes formas de representação, as tabelas, os gráficos, linguagem natural e as expressões algébricas (Ponte, Branco, Matos, 2009, citados por Mateus, 2013). Estas diferentes formas de representação podem ser usadas isoladamente ou em conjunto, representando a informação relativa a uma dada função. Deste modo o estudo de funções constitui um aspeto importante do pensamento algébrico.

Kaput diz que, o pensamento algébrico se manifesta através de conjeturas e argumentos que estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas que se expressam em linguagem formal. O processo de generalização ocorre em qualquer conceito matemático dos primeiros anos de escolaridade, incluindo assim o conceito de função. O autor identifica assim cinco aspetos do pensamento algébrico: a generalização e formalização de padrões e restrições, a manipulação de formalismos guiada sintaticamente, o estudo de estruturas abstratas, o estudo de funções, relações e variação conjunta de duas variáveis e ainda, a utilização de diversas linguagens na modelação matemática e no estudo de fenómenos. Assim o estudo da Matemática tem como grande objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, para o qual contribui fortemente o estudo de funções.

Na mesma linha é defendido pelo NCTM, que o pensamento algébrico é carateriza-se pelo estudo das estruturas, dos símbolos, da modelação e do estudo de variação como: Compreensão de padrões, relações e funções; Representação e análise de situações e estruturas utilizando símbolos algébricos; Utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e Análise de contextos diversos.

É evidente que o pensamento algébrico integra a capacidade de operar com equações, expressões algébricas, inequações, sistemas de equações e inequações e funções. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico carateriza-se segundo três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – As três vertentes do pensamento algébrico.

Representar	Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando convenções algébricas usuais; Traduzir a informação representada simbolicamente para outras formas de representação (objetos, verbal. Numérica, tabelas e gráficos e vice-versa. Evidenciar o sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	Relacionar (analisando propriedades). Generalizar e agir sobre as generalizações revelando compreensão das regras. Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	Utilizar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e inequações, funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Ao observarmos a Tabela 1, podemos compreender melhor o porquê de o estudo de funções desenvolver o pensamento algébrico. Olhando para cada uma destas fases, é fácil, enquadrarmos em cada uma um exemplo acerca do estudo de funções. É deste modo evidente o contributo do estudo de funções para o desenvolvimento do pensamento algébrico e por consequência o contributo para a aprendizagem dos alunos.

As dificuldades dos alunos

Logo que os alunos começam a operar com funções e com as suas terminologias associadas é de imediato que surgem dificuldades, não só pela natureza abstrata das funções, mas também pela simbologia associada e pelas conexões com outros domínios da matemática. Segundo Domingos (1994), são várias as dificuldades que os alunos encontram quando iniciam o estudo de função nomeadamente: a identificação de o que é uma variável e dada uma situação, que variáveis se encontram envolvidas; a determinação de um objeto de uma dada imagem e vice-versa e ainda a passagem da forma algébrica para a gráfica e vice-versa. Se pensarmos no caso da identificação de variáveis, percebemos que esta não é trivial para os alunos, segundo Trigueros e Ursini (2008), compreender as variáveis numa função implica o uso de capacidades como: reconhecer a relação entre quantidades, independentemente da representação em causa; achar o valor da variável independente dada a varável dependente; reconhecer a relação entre as variáveis e as consequências da sua variação, independente da sua representação; determinar os intervalos de variação de uma das variáveis quando os da outra são conhecidos e finalmente, expressar uma função tendo por base os dados de um problema na forma tabular, gráfica ou algébrica.

Os símbolos que usamos quando trabalhamos com funções podem também levantar obstáculos aos alunos, é necessário algum tempo para que os alunos se apropriem deste, dando inicialmente lugar a confusões. Mas não são só os símbolos, os alunos confundem muitas vezes os termos domínio, contradomínio, abcissa, ordenada, objeto e imagem. Muitas vezes depois de introduzida a noção de função, 'a cada objeto corresponde uma e uma só imagem', leva os alunos à sua memorização, oque trás problemas quando os alunos ainda não compreenderam quem são os objetos e o que são as imagens.

Outro tipo de problema surge no trabalho com representações, segundo Elia et al(2007), os alunos têm mais dificuldades em trabalhar problemas em que se parte da representação algébrica, nomeadamente aqueles em que partem da linguagem natural, em problemas em que têm de construir o gráfico através da expressão algébrica e que identificassem uma função num conjunto dado de correspondências entre variáveis. São ainda identificadas pelo autor dificuldades na compreensão da noção de função e nas transições entre representações.

Quando pensamos no modo como temos de construir um gráfico se partirmos da expressão algébrica, pensamos num conjunto de passos ordenados, até porque no 8.°ano, apenas estudamos funções que se representam através de retas, basta o cálculo de dois pares ordenados e o problema está solucionado, através da representação desde num referencial ortogonal e monométrico. Já o processo inverso implica uma tarefa mais complexa.

Ponte (1984), desenvolveu um estudo e identificou um conjunto de dificuldades na construção e interpretação de gráficos, tais como: determinar as coordenadas de pontos em situações que envolvessem variáveis contínuas; dificuldades no trabalho com escalas, tais com a inexistência de uma escala uniforme, dificuldades e confusão na escolha da unidade da escala, falta de atenção na unidade utilizada na escala e escolha inadequada da unidade, dificuldades na determinação do valor da variável independente (Ponte, 1984 citado por Loureiro 2013).

3 - Unidade de Ensino

Caraterização do contexto escolar

O presente ano letivo é o terceiro em que a escola se encontra agrupada, tendo funcionado sempre de forma autónoma até então. A escola pertence ao Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves, no qual a escola sede de agrupamento é a Escola Básica 2,3 Nuno Gonçalves. Este é um agrupamento caraterizado pela multiculturalidade da população escolar, sendo que 22,8% dos alunos não nasceu em Portugal, tendo origem em mais de 26 países. Estes países distribuem-se por um total de 4 continentes: Europa, Ásia, Africa e América. Relativamente, aos encarregados de educação da população estudantil, a maioria tem baixas qualificações escolares e profissionais, existindo uma percentagem de 38,9% dos alunos que usufruem de apoio social escolar (A.E.N.G., 2013b).

O Agrupamento é formado pelas seguintes escolas: JI da Pena, E.B.1 n.º1, E.B.1 Natália Correia, E.B.1 Arq. Victor Palla, E.B. 2, 3 Nuno Gonçalves e a E.S. D. Luísa de Gusmão. Assim, a população escolar é, maioritariamente, oriunda das freguesias da Pena, Graça, Anjos e Penha de França (A.E.N.G., 2013b).

A Escola Secundária D. Luída de Gusmão é frequentada por mais de 600 alunos, mais de metade dos quais frequentam o 3.º ciclo (A.E.N.G., 2013b). Os edifícios da escola apresentam um elevado estado de degradação e a sua remodelação esteve prevista pela iniciativa da empresa Parque Escolar, que, contudo, não aconteceu. Os recursos disponíveis em sala de aula são limitados, pois, apesar de o professor dispor de um computador na sua secretária, este apenas serve para aceder ao programa Inovar da escola, onde são feitos os registos dos sumários e das faltas dos alunos. Estes computadores ao nível do trabalho da aula são muitas vezes inúteis, pois não suportam o '*software*', nem alguns formatos de ficheiros necessários ao trabalho em sala de aula. Nem todas as salas possuem um projetor e o mobiliário das mesmas encontra-se degradado no geral.

A escola contempla o 3.º ciclo e o ensino secundário (regular e profissional), funcionando apenas em regime de ensino diurno. No 3.º ciclo existem 6 turmas de 7.º ano, 6 turmas de 8.º ano e 5 turmas de 9.º ano. A oferta de escola contempla ainda o Ensino Secundário com os cursos Científico Humanísticos de: Ciências Socioeconómicas; Línguas e Humanidades; Ciências e Tecnologias; e Artes Visuais. Ainda ao nível do Ensino Secundário, contempla o Curso Profissional de Técnico de

Comércio e o Curso Profissional de Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos. A escola encontra-se geograficamente bem localizada, além de ter um favorável sistema de transportes públicos à disposição dos alunos (A.E.N.G., 2013a).

A minha lecionação decorreu no 3.º ciclo, numa turma do 8.º ano de escolaridade. Esta turma, já se encontrava, em parte, constituída no ano letivo anterior e a professora cooperante era a professora da turma, usufruindo assim a turma de continuidade pedagógica. A turma já havia trabalhado com professores estagiários, na disciplina de Matemática, no ano letivo anterior. Grande parte dos alunos tem grandes dificuldades apesar de não existirem alunos com necessidades educativas especiais. No início do ano letivo, a turma tinha 24 alunos, dois dos quais nunca frequentaram as aulas, tendo um sido excluído por falta e outro transferido. Apesar deste facto, a turma permanece com 24 alunos, 13 rapazes e 11 raparigas, pois entretanto foram inseridos dois alunos que foram transferidos de outras escolas. Nesta turma existem 5 alunos repetentes, dos quais 4 já tiveram uma retenção e 1 mais de duas retenções, no ano de escolaridade que atualmente frequentam. As idades dos alunos encontram-se entre os 12 e os 16 anos, no início do ano letivo a maioria dos alunos tinha 13 anos.

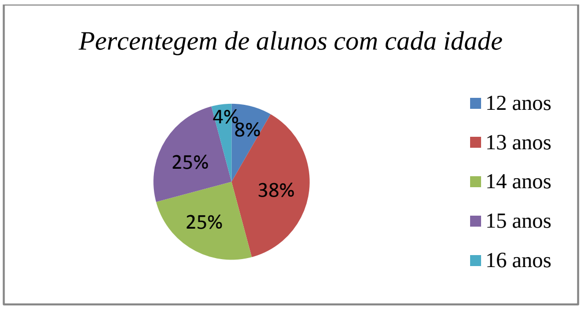


Figura 1 – Percentagem dos alunos da turma com cada idade, no início do ano letivo

A turma tem 11 alunos a beneficiar de ASE, estando 7 abrangidos pelo escalão A e 4 pelo escalão B. No ano letivo anterior, apenas 16 alunos transitaram de ano sem negativas, alguns transitaram de ano com notas votadas em conselho de turma (não a de Matemática) pois, ao serem analisadas as suas caraterísticas, considerou-se que lhes deveria ser dada essa oportunidade. Os professores da turma concluíram, ainda, que seria mais importante manter a coesão do grupo-turma. É importante salientar que esta é uma turma com situações familiares delicadas, mas que têm sido alvo de consideração da diretora de turma e dos restantes professores. Estas situações têm influência no desempenho dos alunos de forma indireta, pois existem alunos que residem em casas de acolhimento, tendo alguns contacto com os pais e outros não, e ainda, alunos com problemas familiares ao nível de alcoolismo e de violência.

A turma tem fraco desempenho na disciplina de Matemática, contudo é uma turma participativa, de modo geral, nas várias fases da aula. Reage de forma positiva ao trabalho em pares, que é a forma de trabalho adotada desde o início do ano. Para o fraco desempenho contribuirá falta de trabalho em casa, apesar de em todas as aulas serem marcados, verificados e ainda corrigidos trabalhos para casa. A turma tem quatro aulas de Matemática por semana. Estas aulas encontram-se agrupadas duas a duas, totalizando de 100 minutos, tendo lugar à segunda e quarta-feira.

Um aspeto interessante desenvolvido com esta turma relaciona-se com a interação entre os alunos durante o trabalho autónomo. No início do ano letivo, neste momento de trabalho na aula, os alunos não interagiam entre si, nem discutiam qualquer tipo de dúvida com o colega, optando sempre por chamar o professor para o ajudar ou validar os seus resultados. Com o decorrer das aulas, pude perceber que os alunos assumiram uma postura completamente diferente, passando a ter iniciativa de se juntar em grupos maiores, para que pudessem aprender mais uns com os outros, pedindo ajuda aos colegas quando não compreendiam. Esta mudança deu-se de forma gradual, estando longe de ocorrerem grandes discussões, mas para alunos que apenas desenvolviam trabalho individualmente foi uma evolução positiva. No decorrer do ano letivo pude, também, reconhecer a heterogeneidade dos alunos, pois esta turma tem alunos muito participativos e alunos muito tímidos que precisam de ser solicitados para participar.

É notório que esta é uma turma com profundas dificuldades a Matemática, através da observação das classificações ao longo do ano. Contudo, de modo geral, o comportamento da turma era bom, sempre dispostos a intervir nas aulas e a contribuir para a aprendizagem que prendíamos que realizassem. Os momentos de trabalho autónomo eram, por vezes, momentos de algum barulho, justificado pelo envolvimento dos alunos na resolução das tarefas com os colegas. Os momentos de exploração de exemplos mostraram resultar muito bem, dando espaço aos alunos de colocar hipóteses, esclarecer dúvidas e retirar conclusões interessantes de modo mais autónomo.

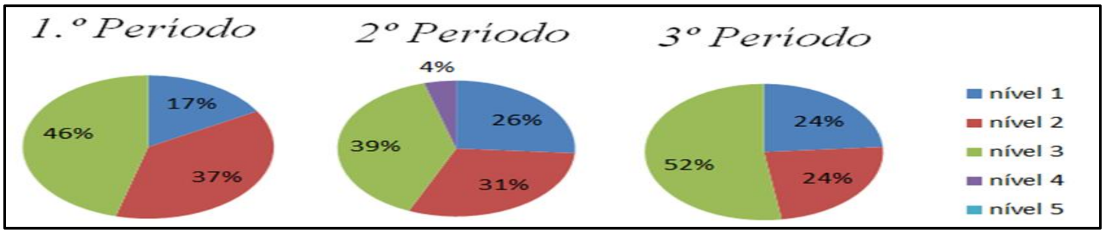
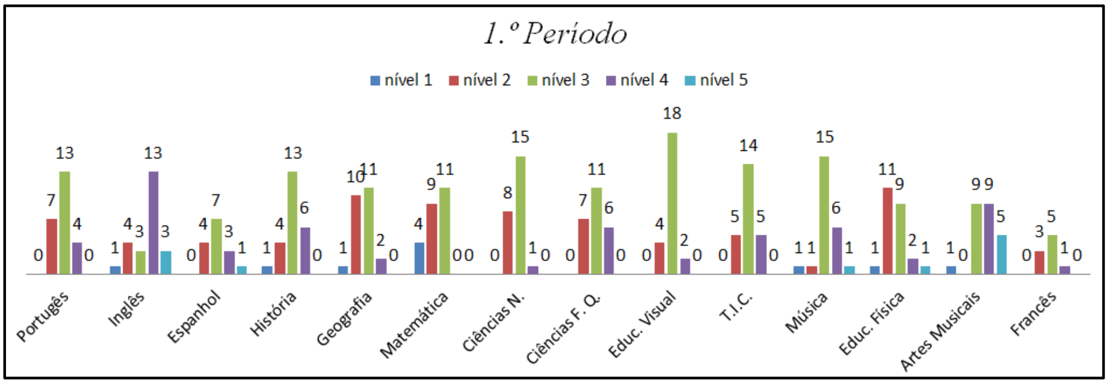
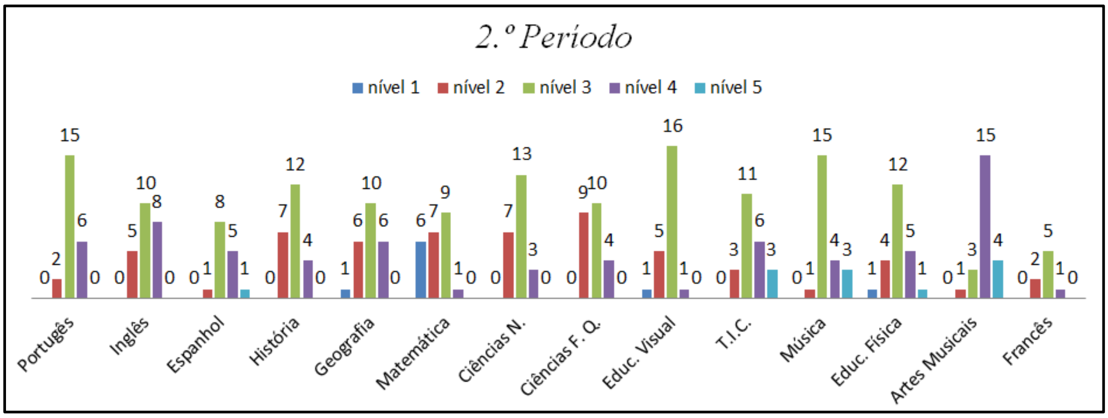


Figura 2 – Classificações a matemática nos três períodos letivos

Analisando as classificações obtidas na disciplina de Matemática, no final de cada um dos períodos letivos, percebemos, de um modo geral, que existem alunos extramente fracos, estando na verdade a tentar alcançar um nível positivo na sua maioria. No decorrer do ano letivo pudemos perceber que apesar das dificuldades a turma teve uma evolução positiva, conseguindo terminar o ano com mais de 50% de classificações positivas à disciplina de Matemática. É ainda evidente que há alunos que mantiveram profundas dificuldades, se olharmos para as percentagens de níveis negativos, note-se que a percentagem de alunos de níveis 1 é bastante elevada, tanto com a de níveis 2. Existem ainda três alunos que deixaram de frequentar as aulas, acabando por reprovar à disciplina por falta de avaliação na mesma.





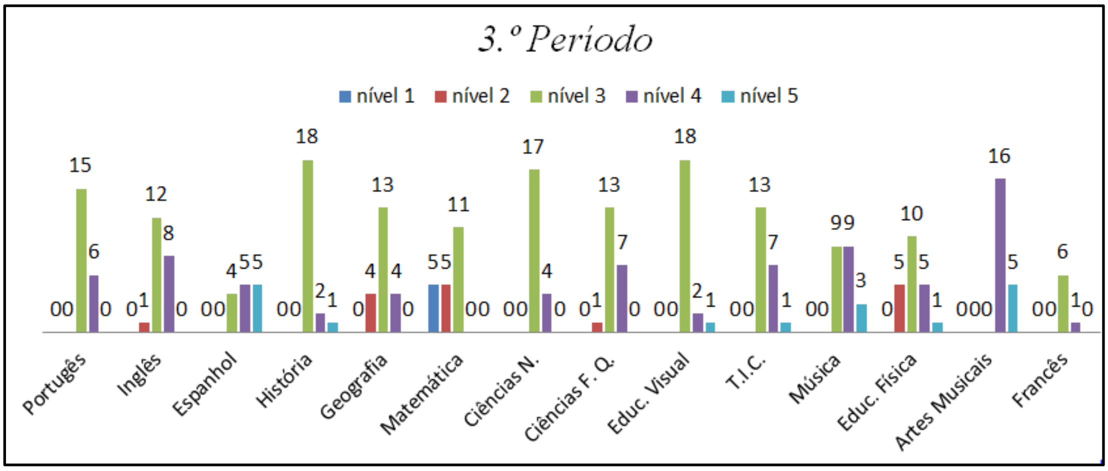


Figura 3 – Classificações dos alunos por disciplina nos três períodos letivos

Para compreender melhor se este fraco desempenho era apenas na disciplina de matemática, recolhi alguns dados junto da diretora de turma. Ao observar as notas de todas as disciplinas ao longo dos três períodos é visível que esta é uma turma de fraco desempenho de um modo geral (ver gráficos na figura 3). Em grande parte das disciplinas, a maioria dos alunos apenas obtém nível 3, com exceção da disciplina de Inglês e Artes Musicais no 1.º período, com maior número de alunos a obter nível 4. Este desempenho apenas se mantém a Artes Musicais, nos dois períodos seguintes e evolui até de modo bastante positivo. Relativamente à média de cada aluno, incluindo todas as disciplinas, existe apenas 1 aluno com nível 4.

Ancoragem da unidade de ensino

A intervenção letiva a partir da qual desenvolvi este estudo foi realizada no domínio das Funções, Sequências e Sucessões, no 8.º ano de escolaridade, tendo por base as orientações do Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico de 2013. Este é um domínio em que os alunos apenas tiveram contato, pela primeira vez, no ano letivo anterior, estando ainda nos primeiros passos da sua aprendizagem. No 7.º ano, os alunos abordaram o conceito de função ou aplicação, domínio e contradomínio, pares ordenados, gráfico de uma função, variável dependente e variável independente, função numérica, gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano, operações com funções numéricas (adição, subtração, multiplicação e exponenciação de expoente natural), função constante, linear, afim e de proporcionalidade direta. (M. E., 2013).

O domínio das Funções, Sequências e Sucessões encontra-se no programa a seguir ao domínio da Geometria e Medida, que contempla nos seus conteúdos o Teorema de Pitágoras e vetores, translações e isometrias, mas por opção do grupo de professores de matemática do 8.º ano, esta ordem não foi seguida. No caso da Geometria e Medida, os conteúdos referentes a vetores, translações e isometrias foram lecionados no início do primeiro período, pois foi adotada a ordem do manual. Este está dividido em dois volumes que têm uma ordem diferente do programa de, o que poderia gerar alguma confusão nas turmas, acerca de que volume trazer e quando, tendo em conta a sua faixa etária. Outra razão, para esta opção prende-se com o facto de ser menos atrativo para os alunos aplicar os domínios de forma sequencial e sem alternância de matérias, o que também pode prejudicar um aluno que tenha mais dificuldades num certo domínio. Assim sendo, de acordo com a planificação a longo prazo elaborada pelo grupo de Matemática com base no programa de 2013, os Gráficos de Funções Afins, foram abordados a seguir às equações literais que se situam no domínio da Álgebra e imediatamente antes da resolução de sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

Na Tabela 1 pode observar-se uma adaptação da parte da planificação a médio longo prazo, realizada pela orientadora cooperante no início do ano letivo, de acordo com o Programa e Metas Curriculares para o Ensino Básico de 2013, correspondendo à unidade onde incidiu a minha intervenção letiva.

Tabela 2 – Adaptado de: Planificação a Médio Prazo – Matemática – 2014/2015

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Planificação a Médio Prazo - Matemática - 2014/2015

8º Ano

Total de blocos letivos (100 min.)		**20**
3.º Período		
Domínio: Funções, sequências e sucessões / Álgebra		
Tópico: Equações e funções		15 blocos
Conteúdos	**Metas / Descritores**	**N.º blocos (100 min.)**
Gráficos de funções afins – Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim. – Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical. – Relação entre declive e paralelismo. – Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas. – Equação de reta vertical. – Problemas envolvendo equações de retas.	**Gráficos de funções afins** *1. Identificar as equações das retas do plano.* **1.** Demonstrar, utilizando o Teorema de Tales, que as retas não verticais num dado plano que passam pela origem de um referencial cartesiano nele fixado são os gráficos das funções lineares e justificar que o coeficiente de uma função linear é igual à ordenada do ponto do gráfico com abcissa igual a 1 e à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas dos pontos da reta, designando-o por "declive da reta" no caso em que o referencial é ortogonal e monométrico. **2.** Reconhecer, dada uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subset \mathbb{R}$), que o gráfico da função definida pela expressão $g(x) = f(x) + b$ (sendo b um número real) se obtém do gráfico da função f por translação de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$. **3.** Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, designar a por "declive" da reta e b por "ordenada na origem". **4.** Reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive. **5.** Reconhecer, dada uma reta r determinada por dois pontos, A de coordenadas (x_A, y_A) e B de coordenadas (x_B, y_B), que a reta não é vertical quando (e apenas quando) $x_B \neq x_A$ e que, nesse caso, o declive de r é igual a $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. **6.** Reconhecer que os pontos do plano de abcissa igual a c (sendo c um dado número real) são os pontos da reta vertical que passa pelo ponto de coordenadas $(c, 0)$ e designar por equação dessa reta a equação "$x = c$". *2. Resolver problemas.* **1.** Determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico. **2.** Determinar a equação de uma reta paralela a outra dada e que passa num determinado ponto. **3.** Resolver problemas envolvendo equações de retas em contextos diversos.	
Conteúdos	**Metas / Descritores**	**N.º blocos (100 min.)**

Tendo em conta os aspetos anteriores, defini como objetivos gerais de aprendizagem desta unidade, os mesmos do Programa de Matemática do Ensino Básico para a Álgebra, devido a ser o tema onde se inseria anteriormente o estudo de funções.

- Serem capazes de identificar e representar equações de retas no plano, em contextos diversos, recorrendo a linguagem matemática e procedimentos algébricos.
- Serem capazes de resolver problemas envolvendo gráficos de funções afins, comunicando, raciocinando e modelando diferentes situações recorrendo a noções e procedimentos algébricos.

Refletindo sobre estes objetivos e sobre os conteúdos e as metas do Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico estabeleci como objetivos específicos para o estudo de gráficos de funções afins:

- Compreender a noção de função, distinguir entre função afim e linear.
- Construir e interpretar Gráficos de funções lineares e afins.
- Escrever e interpretar expressões algébricas de funções lineares e afins.
- Representar funções afins e lineares utilizando diferentes representações e converter umas nas outras.
- Compreender o efeito do declive e ordenada na origem em funções afins.

A intervenção letiva consistiu em 7 blocos de 100 minutos, correspondentes a 14 aulas. Esta intervenção, como referi, abordou o estudo dos Gráficos de Funções Afins, onde incluí os seguintes conteúdos: equação de uma reta não vertical, gráfico de uma função linear e de uma função afim, declive e ordenada na origem de uma reta não vertical, relação entre declive e paralelismo de retas e, por fim, equação de uma reta vertical. A intervenção teve lugar do entre 13 de Abril e 11 de Maio, sendo interrompida nos dias 4 e 6 de Maio para a realização da aula de revisões e do respetivo teste de avaliação, tendo sido estas aulas lecionas pela professora da turma. Por fim, propus aos alunos a realização de uma questão de aula no dia 18 de Maio, dedicada aos gráficos de funções afins.

Estratégias de ensino

Ao elaborar as estratégias de ensino tive a preocupação de definir, como principal objetivo, promover a aprendizagem nos alunos. Para que este objetivo fosse cumprido tentei, sempre, estabelecer estratégias por forma a fomentar a compreensão dos alunos sobre o saber em estudo, procurando ir ao encontro das orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013). Além das destas orientações preocupei-me em propor tarefas que abordassem os conceitos matemáticos de forma sólida e significativa para os alunos, que despertassem o seu interesse e, sempre que possível, apelassem a experiências dos alunos. As tarefas foram implementadas com o objetivo de apelar à inteligência e ao desenvolvimento da compreensão matemática, de estimular os alunos a realizar conexões e de as enquadrar de forma coerente, de promover a comunicação matemática e de trabalhar a resolução de problemas e o raciocínio matemático (NCTM, 1991). Foi ainda ponderado, no delineamento das estratégias a desenvolver com a turma, o que se esperava que os alunos aprendessem e o que, enquanto professora, necessitava de fazer para o conseguir. Também foram ponderados os recursos disponíveis e como iria retirar o máximo de partido destes, tudo num espaço de tempo limitado para a sua concretização.

"Toda a planificação pressupõe a definição (explícita ou implícita) de uma estratégia de ensino, onde sobressaem sempre dois elementos, a atividade do professor (o que ele vai fazer) e a atividade do aluno (o que ele espera que o aluno faça), e se estabelece um horizonte temporal para a respetiva concretização (um certo período de tempo ou número de aulas)." (Ponte, 2005)

A turma com que trabalhei é uma turma que está habituada a um ensino diretivo, mas, na medida do possível, tentei desenvolver atividades de tipo variado: de exploração, problemas e exercícios. A introdução dos conceitos foi realizada constantemente na base de diálogo entre professora e alunos, recorrendo sempre que possível a exemplos, que eram explorados com a turma, existindo continuamente o cuidado de uma sistematização no final da exploração e discussão. Estes diálogos eram quase sempre lançados com questões feitas por mim, mas, por vezes, também, por alunos, criando uma dinâmica de discussão entre eles. Apelei de forma contínua a que os alunos realizassem conexões matemáticas, nomeadamente com a Geometria.

Na verdade, esta não é uma turma onde se possa aplicar de forma "cega" o ensino exploratório. Assim, penso que dentro das limitações que existiam, esta estratégia terá trazido benefícios à aprendizagem dos alunos pois estes não terão apenas mecanizado processos, mas desenvolvido uma compreensão mais sólida e consistente de um tema tão abstrato como as funções.

Neste sentido desenvolvi tarefas que incluíam explorações, problemas e exercícios de modo a contribuir para a compreensão, por parte dos alunos, dos vários conceitos e procedimentos em estudo, nomeadamente, do processo de construção e interpretação de gráficos de funções afins, proporcionando o contato com diversas estratégias de natureza gráfica e algébrica.

Durante o trabalho autónomo, acompanhei a resolução das tarefas por parte dos alunos, esclareci algumas dúvidas, tentei compreender se os alunos estavam a resolver as tarefas de acordo com o que havia previsto, anotei algumas dificuldades por si manifestadas, verifiquei as diferentes resoluções que iam surgido e selecionei algumas para a discussão. Nesta seleção das resoluções das tarefas tentei trazer mais-valias para a aprendizagem dos alunos, quer pela sua diversidade, quer pela resolução estar correta ou, ao estar incorreta, proporcionar aos alunos a oportunidade de corrigir. O trabalho dos alunos foi realizado sempre em pares, pois desde o início do ano que trabalhavam desta forma. Esta foi uma decisão tomada em conjunto com a professora cooperante pois, no início do ano letivo, os alunos muito individualistas. O facto de os alunos serem incentivados a trabalhar em pares, promoveu a entreajuda e a aprendizagem de forma mais visível.

A discussão das tarefas permitiu aos alunos compreender estratégias diferentes, colocar dúvidas, confrontar resultados de modo a identificar erros nas suas resoluções ou nas dos colegas, superar dificuldades e para que os pudessem avaliar as suas aprendizagens com maior coerência.

Selecionei ainda um conjunto de tarefas para os alunos realizarem em casa (anexo XI, XII e XIII), cuja resolução me era entregue no início da aula seguinte. Esta foi uma forma que criei para me ajudar a compreender o que os alunos haviam aprendido ou não em cada aula.

Conceitos matemáticos

Nesta secção, apresento os principais conceitos matemáticos abordados na unidade didática lecionada. Alguns destes conceitos foram abordados nas aulas, outros em aulas do ano letivo anterior ou em unidades anteriores deste ano letivo. Não tendo sido tratados com o formalismo de algumas das definições a seguir apresentadas, tendo em atenção a idade e o nível de escolaridade dos alunos, tendo sido utilizada uma linguagem simples e próxima dos alunos. A utilização desta linguagem mais simples e menos formal, prende-se com a minha preocupação, como professora, com a compreensão dos conceitos. É importante que os alunos saibam mais do que um conjunto de regras e definições e, para isso, importa que o professor compreenda profundamente o conceito e as suas conexões com outros conceitos. Não é um caminho fácil para os alunos, assim, deve ser o professor a auxiliá-los neste percurso, para que possam dar sentido ao que estão a aprender.

A noção de função é apresentada como correspondência entre dois conjuntos A e B, em que a cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B. Esta noção foi revisitada pela grande importância que tem no estudo dos gráficos de funções afins. Sem esta noção bem esclarecida seria difícil avançar no estudo das funções afins como era o objetivo desta prática. Deste modo, a melhor forma de a esclarecer foi através de exemplos com representações de funções e de exemplos de representações que não eram funções.

Neste revisitar de noções que os alunos já conheciam foram ainda recordados outros conceitos como os que se seguem, mas sempre recorrendo a exemplos apresentados, ou oralmente, ou nos materiais construídos para apoio à aula. A discussão destes exemplos deu, aos alunos, a oportunidade de expressar as ideias certas ou erradas, para que os pudesse ajudar a realizar a sua aprendizagem.

Produto cartesiano de dois conjuntos: Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$ e denota-se por $A \times B$.

Correspondência entre dois conjuntos: Uma correspondência de A para B é um subconjunto de $A \times B$.

Função: Função f definida em A e com valores em B, é a uma correspondência de A para B, $f: A \rightarrow B$, tal que $(x, y_1), (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. O conjunto A designa-se por domínio da função e os seus elementos objetos da correspondência.

Contradomínio: O contradomínio de f é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe pelo menos um $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, denota-se por D'_f. Os elementos deste conjunto designam-se habitualmente por imagens de f.

A noção de função foi tratada com grande cuidado, devido às dificuldades demonstradas pelos alunos. As noções de domínio e contradomínio de uma função estavam esquecidas e tive de colocar várias questões e utilizar vários exemplos, para recordar como se designavam.

Foi apresentada, mas sem grande destaque, a noção de função real de variável real, tendo sido alvo de algumas questões nas primeiras aulas. Achei que não deveria ser esquecida porque os alunos aprenderam o conjunto dos números reais, este ano letivo. Deste modo, uma função real de variável real foi dada a conhecer aos alunos, como uma função cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Nesta linha, distingui ainda o caso de a função ser numérica como uma função em que o conjunto de chegada é um conjunto de números e, por fim, que uma função se diz de variável numérica quando o seu domínio é um conjunto de números. Estas noções foram trabalhadas do ponto de vista matemático em pequenas questões e leitura da definição (Anexo XVI) e na tarefa 1: revisões acerca de funções (Anexo VII).

Função afim (linear ou não linear): Função afim é uma função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, da forma $f(x) = ax + b$, com a e b reais.

Se b=*0* ($a \neq 0$), a função $f(x) = ax$ chama-se função linear.

Se a=*0* ($b \neq 0$), a função $f(x) = b$ chama-se função constante.

Quando uma função afim se encontra representada na forma $f(x) = ax + b$, diz-se que está na forma canónica. Esta forma é uma representação algébrica da função, em cada um dos casos.

A família das funções afins foi abordada separadamente, começando com a função constante seguindo para a função linear e, finalmente, a função afim. As funções foram exploradas analisando exemplos de cada um dos tipos separadamente, através da leitura da definição e da explicitação de como se representavam algébrica e graficamente. A exploração destas funções foi feita, no decorrer das aulas, colocando sempre questões aos alunos, e através das tarefas elaboradas para este estudo. Surgiu ainda a oportunidade para consolidar o estudo de equações que os alunos já haviam estudado este ano letivo. No decorrer do estudo as mudanças entre tipos de representação foram ganhando espaço para que os alunos atingissem uma maior compreensão.

Sempre que oportuno foram realizadas conexões matemáticas com a resolução de equações, pois os alunos necessitavam muitas vezes de resolver equações de 1.º grau para determinar o valor de um objeto ou de uma imagem e o valor da ordenada na origem. Este trabalho foi também adequado devido à necessidade da construção de equações de reta que foram definidas do seguinte modo:

Equação da uma reta: Os gráficos de funções afins são retas não verticais de equação $\boldsymbol{y = ax + b}$**,** com a e b números reais em que a e b não podem ser simultaneamente nulos, e em que *a* é o declive da reta e *b* é a ordenada na origem.

O declive de uma reta não vertical é o valor de $\boldsymbol{a = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}}$, em que $(x_a, y_a), (x_b, y_b)$ são dois pontos da reta.

A equação da reta foi abordada para a família de funções afins. A abordagem começou com a exploração e discussão de exemplos introdutórios, seguindo-se a construção de equações de retas pelos alunos nas tarefas, chamando à atenção para o processo para o conseguir e depois à análise dos resultados obtidos.

No tratamento da noção de equação de uma reta foi abordado o estudo dos parâmetros *a* e *b*, declive e ordenada na origem de uma reta, respetivamente, tendo sido alvo de uma exploração em sala de aula, com a ajuda da calculadora gráfica, que além de motivar os alunos permitiu-lhes chegar a uma noção da relação entre declive e paralelismo de retas.

Relação entre declive e paralelismo: Duas retas não verticais são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

Este resultado foi abordado em meia aula, pois os alunos tinham compreendido a noção de declive de uma reta devido ao grande destaque dado nas aulas as estas noções. A noção de declive e ordenada na origem estiveram sempre presentes devido à sua importância na construção da representação algébrica e gráfica, fortemente trabalhada pelos alunos.

Tipos de representação de uma função:

Nas aulas foram abordados os seguintes tipos de representação: usando linguagem natural, gráfica, de diagrama sagital, tabular e algébrica. No decorrer da unidade de ensino foram trabalhadas a representação gráfica e algébrica, de acordo com as diretrizes do Programa de Matemática de 2013. As restantes foram trabalhadas nas primeiras aulas, pois havia que trabalhar todos os tipos de representação. Contudo tendo em conta o ensino das funções e os conteúdos do Programa de Matemática de 2013, esta foi a opção.

Para falar da construção das representações gráficas de funções foi ainda necessário rever o conceito de referencial cartesiano ortogonal e monométrico.

Referencial cartesiano ortogonal e monométrico: um referencial cartesiano diz-se ortogonal e monométrico se os eixos são perpendiculares entre si e a unidade de medida é a mesma nos dois eixos.

Deste modo, define-se gráfico de uma função *f(x)*, considerando um plano onde se fixa o referencial ortogonal e monométrico, como o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas (x, y) são tais que $y = f(x)$.

Foi ainda importante para os alunos a noção de que dois pontos definem uma reta, pois esta relação estava sempre presente nas suas construções de representações gráficas, dado que as representações gráficas de todas as funções que estudaram até ao momento são retas. Nesta fase existiu ainda o apelo às conexões com o tema da Geometria.

Para a construção das representações gráficas os alunos tiveram ainda de determinar coordenadas de pontos que pertenciam à função, pelo que tinham de saber resolver equações do 1.º grau. Deste modo os alunos voltaram ainda a contactar com o conceito de equação.

Equação: É qualquer igualdade em que, pelo menos um dos membros, contém uma ou mais variáveis, a que chamamos incógnitas, porque representam quantidades desconhecidas.

Este foi um conceito de grande importância no estudo de funções, pois era importante que os alunos compreendessem que a representação algébrica de uma função não é mais que uma equação. Este foi um ponto trabalhado, pois aqui a questão de muitas vezes aparecer uma incógnita sob a forma de $f(x)$, não é trivial para os alunos. Assim, cabe ao professor fazer o paralelo entre estes dois conceitos — equação e função — tão próximos, mas ao mesmo tempo tão distantes para os alunos.

Sequência de tarefas

Na elaboração e seleção das tarefas a propor aos alunos, a minha primeira preocupação foi ter em conta o tipo de ensino a que estes alunos estão habituados, não colocando de parte as explorações, mas tendo consciência que esta não era uma turma habituada a trabalhar através de tarefas exploratórias. Decidi construir três tarefas que conseguissem abranger a maior parte da unidade de ensino e que promovessem a aprendizagem dos alunos ao longo da lecionação, e selecionei, ainda, algumas tarefas do manual que contemplassem o resto da unidade. De acordo com as orientações da professora cooperante Helena Fonseca, comecei por elaborar a primeira tarefa que era destinada a rever noções que os alunos já haviam trabalhado no ano letivo anterior.

As tarefas foram elaboradas de modo a que os alunos fossem construindo passo a passo, os seus conhecimentos acerca de funções. Nesta construção tentei que estivesse sempre presente, de modo equilibrado, tanto estratégias algébricas, como gráficas. As tarefas apelavam também a conexões com outros domínios da matemática como a Geometria e Medida, os Números e Operações e a Álgebra, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007. A elaboração de três tarefas que pudessem desenvolver as aprendizagens teve em conta o trabalho desenvolvido ao longo das aulas e ainda a preocupação de que que os alunos não seccionassem as aprendizagens, mas sim, que pudessem compreender que em Matemática tudo está relacionado.

Outra preocupação que tive quando elaborei as tarefas foi que estas tivessem uma linguagem clara e simples, para que os alunos se apropriassem destas com facilidade. Ao mesmo tempo, elaborando apenas três tarefas para as aulas, e que percorressem toda a unidade, era importante mostrar as diferentes formas como uma questão pode ser colocada, pelo que essa preocupação foi tida em conta. A diversidade de formas de colocar a mesma questão, teve em conta a preparação dos alunos para o seu futuro percurso escolar.

Tarefa 1 (Anexo VII): **Revisões acerca de funções.** Esta tarefa destinava-se apenas a ser trabalhada na primeira aula e é composta por quatro questões.

O meu objetivo é que os alunos recordassem os conhecimentos sobre funções, que foram lecionados no 7.° ano. Assim, a tarefa visava recordar a noção de função, as diferentes formas de representação de uma função: gráfica, algébrica, tabular e diagrama sagital. Para tal, os alunos tinham de mobilizar os seus conhecimentos do ano anterior recordando, por exemplo, como se lê um diagrama sagital e como se faz a leitura de um gráfico, qual a noção de domínio e contradomínio de uma função e como manipulam expressões algébricas.

Esta tarefa não pretendia ter um grau de dificuldade elevado, mas sim, permitir aos alunos recordar conhecimentos do ano anterior e, ainda, esclarecer questões de noções ainda não interiorizadas, como por exemplo, a noção de função. Esta tarefa tem questões com contexto real e puramente matemático.

Tarefa 2 (Anexo VIII): A tarefa destinava-se a ser trabalhada na segunda e na terceira aula. Um objetivo da segunda aula era recordar o teorema de Tales, que os alunos já conheciam do ano letivo anterior. Este revisitar do teorema de Tales destinava-se, apenas, a recordar o resultado e mostrar aos alunos, como o poderiam aplicar no domínio das funções. Assim, seriam realizadas na segunda aula apenas as questões 1 e 2 da tarefa. Ambas as questões tinham uma natureza puramente matemática, mas pretendiam mostrar aos alunos como poderiam aplicar os seus conhecimentos de Geometria em funções. A primeira questão pretendia que os alunos descobrissem, na primeira alínea a abcissa de um ponto, e na segunda alínea a ordenada por aplicação do teorema de Tales.

Na segunda questão, havia já uma pequena demonstração, recorrendo ao teorema de Tales. Estas duas questões apelavam também a noções geométricas, que os alunos precisavam de mobilizar para que as pudessem resolver.

As restantes questões 3, 4, 5 e 6 destinavam-se a ser aplicadas na terceira aula, pois já havia sido introduzida a noção de declive de uma reta e de ordenada na origem.

A terceira questão divide-se em duas alíneas para as quais são dadas três funções afins. Na primeira alínea, os alunos têm de construir a representação gráfica de cada uma das funções. Esta alínea é muito importante, pois estes alunos estão ainda numa fase inicial do estudo de funções. Pretendia-se que os alunos compreendessem a necessidade de determinar dois pontos da função, e os determinassem pois estes são fundamentais para a construção da sua representação gráfica. Esta alínea apelava, também, a que o aluno associasse que obtinha sempre uma reta em todos os casos, reforçando a noção de que a representação gráfica de funções afins e lineares são retas. Na segunda alínea, era esperado que os alunos fossem capazes de identificar o declive e a ordenada na origem de cada uma das funções afins por observação da expressão algébrica.

A quarta questão prende-se ainda com a noção de declive. Pretendia-se reforçar nos alunos a ideia que os alunos associassem que o gráfico de uma função linear, quando o declive é positivo encontra-se no 1.º e 3.º quadrantes e no 2.º e 4.º quando o declive é negativo.

No que diz respeito à quinta questão, esta já exigia que os alunos aplicassem os seus conhecimentos para determinar a equação de uma reta, que representa uma função afim dados dois pontos. Este é um exercício muito importante para o futuro no que diz respeito ao estudo de funções. Aqui pretendia-se que os alunos determinassem o declive da reta, com os dois pontos e a ordenada na origem considerando a equação de uma função afim e um ponto da reta. Esta questão apelava a que os alunos compreendessem quais são os pontos que deveriam considerar, como deviam proceder para aplicar a fórmula do declive e, ainda, mobilizava os seus conhecimentos de resolução de equações de primeiro grau, reforçando mais uma vez as conexões matemáticas.

Por fim, a sexta questão tinha por objetivo que os alunos determinassem a expressão analítica de funções afins. Esta continha três alíneas, para que os alunos tivessem oportunidade de compreender e treinar o processo. Esta última questão, pretendia ainda, que os alunos compreendessem que apesar de o declive estar presente tanto na função afim como na função linear, o modo de o determinar pode ser diferente. Outro aspeto importante desta questão relaciona-se com o facto de, no caso da função linear, a ordenada na origem ser sempre zero. A sequência das questões 5 e 6, ajudou os alunos a confrontarem-se com o facto de que, para determinarem o declive de uma função afim, precisam de dois pontos e no caso da função linear apenas necessitam de um ponto. Outro processo evidenciado nas questões 5 e 6 relaciona-se com a determinação do valor da ordenada na origem que, no caso da função afim, é feito através da resolução de uma equação porque não era possível fazê-lo por observação do gráfico. Pretende-se ainda que os alunos distingam os processos e ainda que mobilizem os seus conhecimentos de equações, realizando conexões matemáticas.

Esta tarefa tem uma natureza mais prática e menos problemática, mas não foi menos importante para os alunos, pois na fase em que se encontravam necessitavam de conhecer os processos para depois os poderem aplicar a situações problemáticas. A decisão de propor uma tarefa que apela à realização de procedimentos, teve por base a noção de que era a primeira vez que os alunos tinham contato com tarefas envolvendo as noções de declive, ordenada na origem e construção de expressões algébricas.

Tarefa 3 (Anexo IX): Esta tarefa destinava-se a ser trabalhada na quarta e na quinta aula. É composta por seis questões, que tinham como objetivo reforçar algumas noções com que os alunos já haviam trabalhado e aplicar as funções em problemas com contexto.

A primeira questão era composta por três alíneas, as quais pretendiam consolidar noções que os alunos vinham a trabalhar, mas que se previam levantar mais dificuldades. Na primeira alínea, os alunos deveriam representar uma função linear e uma função afim na forma canónica, tendo de mobilizar os seus conhecimentos de operações com polinómios. A segunda alínea, tinha como objetivo que os alunos mostrassem se dois pontos dados pertenciam à função linear □. Esta questão apelava ao raciocino e à compreensão de quem desempenha o papel de variável independente e dependente.

A terceira alínea vem no seguimento da anterior, tentando dar aos alunos uma noção de um tipo diferente de questão com que podem ser confrontados, mas que tem uma resolução semelhante desta vez envolvendo a função afim. Neste caso o objetivo era determinar as coordenadas de um ponto do gráfico da função. Num primeiro caso, dada a abcissa desse ponto, e, no segundo caso, dada a ordenada do ponto, o que levava a que os alunos tivessem de resolver uma equação para descobrirem a abcissa. As duas situações foram propostas com o objetivo de que os alunos compreendessem que, apesar de estarem a obter pontos que pertencem à mesma função, de acordo com os dados fornecidos, podiam ter de aplicar procedimentos diferentes.

A segunda questão pretendia trabalhar mais uma vez a representação gráfica de funções lineares, a determinação do declive de uma função linear e, ainda, que os alunos escrevessem a equações de retas e a expressões algébricas de funções lineares e se apercebessem das diferenças na sua representação simbólica. Esta questão voltava a trabalhar a noção de declive e o efeito que este provoca na representação gráfica da função e ainda mostrava aos alunos os diferentes termos com que podem ser confrontados, mas que têm igual significado.

A terceira questão é um problema com contexto para que os alunos compreendam como podemos aplicar os conhecimentos de funções no quotidiano. Pretendia que os alunos compreendessem que necessitam de interpretar a informação dada no enunciado e depois usar os seus conhecimentos de funções para resolver o problema. Este problema apelou ainda à interpretação das respostas obtidas pelos alunos e à sua tradução de acordo com o contexto do problema. O problema tentava reforçar ainda o trabalho com as substituições da variável independente e dependente, para a obtenção das soluções e o trabalho com resolução de equações.

Na quarta questão são consideradas apenas funções afins. Nesta questão pretendia-se que os alunos trabalhassem a construção de representações gráficas de funções, apelando à relação entre o declive da reta e a sua inclinação, interiorizassem o significado geométrico da ordenada na origem como o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas e, ainda, efetuassem o processo para determinar o declive e a ordenada na origem. A questão proporcionou aos alunos o confronto com vários tipos de condições iniciais, com o objetivo de determinar a equação da reta.

Na quinta questão é apresentada a representação gráfica de três funções distintas, constante, linear e afim. Pretendia-se que os alunos tivessem a oportunidade de mostrar que sabem distinguir e construir a equação de cada uma das retas. Neste caso, os alunos poderiam ainda mobilizar diferentes tipos de abordagem no que diz respeito à determinação da ordenada na origem, podendo determiná-la por observação gráfica ou pela resolução da equação da reta. Esta questão foi colocada para que os alunos compreendam como devem proceder caso partam de uma representação gráfica.

Finalmente a sexta questão, é novamente um problema com contexto, mas no envolvendo a função afim. O problema apela à interpretação de dados, à construção da expressão algébrica e à interpretação de soluções no contexto apresentado, o que lhe confere um grau de dificuldade superior ao da questão 3. Este é um problema com contexto para que os alunos compreendam a aplicação do que aprendemos nas aulas no ambiente que os rodeia. Mais uma vez este problema evoca o trabalho com equações, o uso de substituição de variáveis por valores concretos e mobiliza ainda o trabalho com percentagens de modo a modelar novas situações. Mais uma vez apela-se ao raciocínio e às conexões matemáticas para a resolução do mesmo.

Esta tarefa pretendeu acima de tudo dar uma visão geral aos alunos de tudo o que pode ser feito com as funções linear e afim, como devem proceder para converter representações algébricas em gráficas e gráficas em algébricas. Os alunos tiveram, também, a oportunidade de interiorizar procedimentos importantes, sem os quais não conseguiam evoluir no estudo de funções, e compreender como podem utilizar as funções para resolver problemas da vida real e de situações próximas da sua realidade.

Tarefas do manual (Anexo X): Pretendia-se, com as três questões selecionadas do manual, que dadas equações de retas, os alunos compreendessem como identificavam e justificavam se estas eram paralelas. Pretendia-se, ainda, que os alunos fossem capazes de aplicar o teorema relativo ao paralelismo entre retas não verticais e, também, que mobilizassem este resultado sempre que oportuno e de acordo com os dados da questão, como é o caso da questão 8.

Avaliação das aprendizagens

Quando se fala em avaliação é imediato a associação a um teste de avaliação escrito, mas, ao longo deste mestrado, compreendi que a avaliação não se deve, nem se pode, resumir ao uso deste instrumento. Se assim procedesse estaria a ignorar uma parte da avaliação, tornando-a injusta e desigual.

É do conhecimento geral que para compreender se a nossa aprendizagem está a evoluir de forma positiva temos de ser avaliados, a questão é a forma como o devemos ser, pois a avaliação só é promotora de aprendizagem quando não a limitamos ou a restringimos a uma avaliação sumativa. Na avaliação que realizei procurei ter em conta algumas das linhas orientadoras de como devemos realizar uma avaliação promotora de aprendizagem que apresento a seguir.

Segundo Santos (2008, p.4), a avaliação formativa é “um processo de acompanhamento do ensino aprendizagem”, para que melhor possamos compreender a forma como o aluno aprende, as aprendizagens que desenvolve e as dificuldades que manifesta. Para isto é ainda importante recordar, que segundo Santos (2008), a recolha de informação, não é suficiente, deve ainda dar-se a interpretação dessa informação, através da qual depois decorrerá uma intervenção reguladora. Essa intervenção pode tocar diversos aspetos como o esclarecimento da relação entre objetivos de aprendizagem e as tarefas, explicitação e negociação de critérios de avaliação, para que os alunos os possam compreender melhor, o modo como as suas aprendizagens são avaliadas nas tarefas que realizadas. Percebe-se que a interação professor-aluno é central, de forma, a que se desenvolva, progressivamente, um processo de diálogo entre o professor e o aluno, em que ambos têm pontos de vista diferentes à partida, mas que, através destes diálogos, se consigam construir entendimentos comuns.

De modo mais sintético, segundo Abrech, em Santos (2008), a avaliação formativa tem de: estimular a reflexão no aluno acerca da sua aprendizagem, ser dirigida ao aluno, constituir parte da aprendizagem, adaptar-se a cada individuo, respeitando assim a pluralidade e a diversidade, ter em conta, tanto os resultados quanto os processos, agir de forma interveniente na aprendizagem e/ou no ensino, não se limitando a observar, procurar o sentido das dificuldades e as razões para que estas existam e, finalmente, dirigir-se, também, ao professor para o orientar na sua prática letiva. É evidente que esta avaliação, como prática diária de sala de aula pode contribuir para o ensino e a aprendizagem dos alunos.

Tentei deste modo, aplicar aquilo que Santos (2008) nos indica como fazer parte de uma avaliação formativa ou reguladora: o questionamento oral na aula (NCTM, 2000), a observação direta do trabalho dos alunos, a recolha e análise dos trabalhos enviados para casa e uma questão de aula realizada no final da lecionação, em trinta minutos do final de uma aula.

Relativamente ao questionamento oral na aula, não só é uma das práticas mais usadas pelos professores, como é um instrumento que pode ajudar a revelar as aprendizagens dos alunos. O questionamento permite ainda que o professor se adapte melhor às necessidades de cada aluno e potencia a interação professor-aluno, por isso foi uma prática constante nas minhas aulas. Durante os diálogos, criei condições para que os alunos pudessem participar, expondo as suas ideias e, também, que estes se sentissem à vontade se estas fossem refutadas por outro colega, ou mesmo por mim. Estas interações ajudavam-me, muitas vezes, a compreender como estava a aprendizagem de cada aluno e o que ainda tinha de ser trabalhado.

As normas para a avaliação escolar que nos são sugeridas pelo NCTM (1995), são também úteis para a avaliação que pretendi conduzir: norma para a Matemática (reflete a Matemática que todos os alunos devem saber e ser capazes de fazer), norma para a aprendizagem (melhoria da aprendizagem em Matemática), norma para a equidade (promoção da equidade), norma para a transparência (ser um processo transparente), normas para as inferências (promoção de inferências válidas) e a norma para a coerência (ser um processo coerente).

Durante a prática letiva tentei concretizar este tipo de avaliação, tendo consciência que uns dias me saí melhor que outros. Refleti a respeito da informação que queria recolher e como iria proceder para o fazer, para que esta me pudesse ajudar nas inferências acerca das aprendizagens e das dificuldades dos alunos. Escolhi, então, recolher os seguintes elementos para me auxiliarem na avaliação:

Registos de aulas. Estes registos consistem em gravações áudio, provenientes de gravadores colocados junto a três grupos de trabalho, em todas as aulas por mim lecionadas, mas que além das interações entre estes três pares de alunos registaram todas as discussões realizadas em cada aula e, ainda, todas as minhas intervenções efetuadas para além do trabalho autónomo dos alunos.

Estas gravações permitem-me revisitar todas as aulas e refletir acerca das intervenções dos alunos, permitindo-me avaliar melhor as mesmas.

Registos dos alunos. Em todas as aulas foram recolhidas as resoluções das tarefas de todos os alunos para serem digitalizadas. Deste modo, tive a oportunidade de analisar com mais detalhe o trabalho desenvolvido por cada aluno, em cada aula.

Trabalhos enviados para casa. Foram enviados, em todas as aulas, trabalhos para os alunos realizarem em casa. Estes trabalhos eram efetuados numa folha à parte, que era recolhida no início de cada aula, para que eu pudesse digitalizar e corrigir todos os trabalhos. Estes trabalhos de casa permitiam-me compreender melhor o que os alunos aprenderam na aula anterior, que dificuldades tinham e que conceitos ainda se encontravam por esclarecer. Os trabalhos de casa eram corrigidos e devolvidos com ‘feedback’ escrito para cada aluno. Estes trabalhos eram sempre alvo de um comentário sobre o panorama geral da turma, no início de cada aula, ou, quando necessário, eram corrigidos em parte ou na totalidade. Surgiram resoluções em que alguns alunos tinham copiado o trabalho por outros colegas, apenas num trabalho de uma aula. Neste sentido, chamei à atenção dos alunos que fazer o trabalho de casa ajuda-os a consolidar aprendizagens e a perceber as suas dificuldades.

Questão de aula. Todos os períodos, os alunos realizaram pelo menos o que chamei de uma Questão de aula que integrava a sua avaliação. Estas questões eram preparadas tendo em conta, o trabalho realizado com os alunos durante as aulas. A questão de aula desempenha um papel importante, pois permite ao professor e ao aluno o confronto com as dificuldades ainda existentes.

A questão de aula que utilizei contempla duas perguntas. Com a primeira pergunta pretendo compreender se os alunos sabem construir representações gráficas e algébricas e realizar mudanças de representação gráfica para algébrica e algébrica para gráfica, envolvendo funções afins. Por fim, pretendo ainda que os alunos saibam aplicar o teorema " duas retas não verticais são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive" para a construção da expressão algébrica.

A última pergunta, revisita a função linear e serve para verificar se os alunos compreendem o processo de construção de expressões algébricas de funções lineares.

As aulas

Nesta secção apresento um resumo de cada uma das aulas que lecionei, para que possa explicar melhor as opções que tomei e aspetos que não decorreram de acordo com os planos de aulas, que se encontram nos Anexos I a VI. Tento também explicar que objetivos foram atingidos em cada aula.

Estas foram aulas onde pude compreender, com a ajuda das intervenções dos alunos, o que aprendiam e, ainda, o que não resultava tão bem. Além das aprendizagens dos alunos, outra aprendizagem se desenrolava em paralelo, a minha como professora. Não me será possível descrever exaustivamente as aulas, nem todas as minhas aprendizagens. Revisitar estas aulas é como entrar na sala uma e outra vez, revisitando momentos e apreciando conquistas dos alunos e, por vezes, percebendo melhor algumas dificuldades que ficaram registadas e sobre as quais me pude debruçar com mais calma para compreender o correu bem e o que correu mal.

Nesta descrição apesar de serem duas aulas refiro-me a ambas como uma só aula, pois este facto deve-se a dois blocos serem duas aulas, mas que na prática funciona como apenas uma, pois não há qualquer pausa. Tomei esta opção para conseguir ser mais fiel ao que se passou durante a minha intervenção.

Aula n.º1 e n. º 2 – 13 de Abril de 2015 (100 minutos). A primeira aula foi pensada e planeada com o propósito de que os alunos se recordassem dos conteúdos, acerca de funções, lecionados no ano letivo anterior. O principal objetivo desta aula era recordar um conjunto de conceitos que os alunos já deveriam conhecer.

A aula teve um ritmo mais lento do que eu desejava, pois os alunos não se recordavam dos conceitos tinham sido lecionados no ano anterior. Este facto fez com que tivesse de abandonar os tempos definidos no plano de aula, passando este apenas a servir de guia à estrutura da aula. Relativamente aos objetivos desta aula, ao nível da revisão dos conceitos acerca de funções e terminologias associadas, penso que foram conseguidos de um modo geral, uns mais do que outros. Um objetivo atingido relaciona-se com a noção de função, pois os alunos confundiam esta noção com a representação gráfica da função linear. Esta aula fez com que conseguissem compreender, novamente, a definição de função, criassem exemplos e, também, que percebessem que esta era uma associação errada.

A interiorização dos diferentes tipos de funções foi conseguido, mas não na totalidade, pois os alunos acabavam por confundir muitas vezes, como pude perceber durante o trabalho autónomo, as três funções. Contudo, sendo a primeira aula do tema, e estando os alunos a lidar com funções apenas pela segunda vez no seu percurso escolar contudo esta era uma confusão natural e que seria esclarecida com o decorrer das aulas. Um objetivo que não achei que fosse conseguido nesta aula foi a distinção entre variável dependente e independente. Os alunos tiveram algumas dificuldades em associá-las, acabando muitas vezes por trocá-las quando questionados.

No decorrer da aula tentei que os alunos compreendessem que é necessário utilizar a linguagem matemática adequada, tanto no que diz respeito à escrita como à oralidade. Os alunos têm alguma tendência para uma linguagem menos rigorosa, pelo que me esforcei sempre em traduzi-la para uma linguagem matemática adequada. O uso dessa linguagem menos rigorosa é igualmente importante, pois é uma forma de colocar os alunos mais à vontade dentro da sala de aula e uma forma de incentivar mais a sua participação, contudo, apesar deste facto, tento sempre durante a aula pedir que se exprimam de forma mais rigorosa e, quando não o sabem fazer, acabo por ser eu a explicar como o devem fazer.

De modo geral, os objetivos da aula foram atingidos, pois os alunos acabaram por recordar todas as noções que eu pretendia. O ponto que considero mais negativo prende-se com a minha gestão da aula quando me encontro a explorar a introdução de uma noção, porque quero que sejam os alunos a chegar à resposta e não eu a fornecê-la. Contudo, para uma turma com um aproveitamento tão fraco, acho que reagiram muito bem e que realizaram uma aula muito produtiva.

Aula n.º3 e n.º4– 15 de Abril de 2015 (100 minutos). A segunda aula começava já com alterações, pois era importante terminar a discussão da tarefa 1 para esclarecer os problemas que detetei. Mais uma vez esta foi uma aula onde o plano de aula apenas orientou a ordem pela qual a aula iria decorrer. Quando os alunos chegaram, tudo estava previamente preparado, de modo a poder dar o máximo como faço em cada uma das minhas aulas. Esta aula era mais stressante para mim e para os alunos, pois estes ficam mais inibidos quando têm outros professores na sala de aula.

Nesta aula a fasquia estava alta para uma turma com fraco aproveitamento. O principal objetivo era que os alunos compreendessem a aplicação do teorema de Tales nas funções e como deveriam proceder para o usar na resolução de tarefas. Do meu ponto de vista este objetivo não foi concretizado, apesar de ter parado a aula e explicado por diversas vezes o que era pedido e necessário realizar e até deixado um exemplo de aplicação no quadro para auxiliar os alunos aquando da resolução autónoma dos exercícios propostos. Contudo não acho que tenha resultado. Um primeiro facto, que penso que deve ter gerado confusão, relaciona-se com a figura do diapositivo que usei para a explicação do teorema não ser a mesma do exemplo de aplicação. Outra questão que contribuiu para uma agitação, da minha parte, foi um problema com os diapositivos que tinha construído para a aula. Mesmo assim, encarei a situação de forma positiva, pedi a um aluno que distribuísse as tarefas para o trabalho autónomo e indiquei os exercícios a realizar. Com a ajuda da professora cooperante a acompanhar o trabalho dos alunos e de uma aluna que controlou o tempo que demorei a refazer as animações nos diapositivos pude regressar para acompanhar os alunos ainda a tempo e com o problema já resolvido para o resto da aula. Esta foi uma situação de stresse, principalmente porque era a primeira aula assistida, mas que consegui superar. Uma atitude a melhorar relativa à minha postura é que, estou sempre preocupada em controlar a turma no geral e não tanto a resolução de um aluno que decorre no quadro, porque penso sempre que a posso controlar pelo canto do olho. Esta atitude passa uma ideia de que a resolução não é muito importante aos alunos, o que não é verdade.

No que respeita aos objetivos relativos à noção de declive, penso que o uso da calculadora gráfica teve uma influência positiva na compreensão da relação entre a noção de declive de uma reta e a sua inclinação. Apesar de os alunos terem trabalhado de forma interessada este objetivo só foi parcialmente cumprido no que respeita à construção das representações da reta na folha de papel, ficou por conseguir. Muitos alunos desenharam retas sem assinalar os respetivos pontos e outros não sabiam marcar os pontos. No que respeita ao trabalho com a calculadora gráfica os alunos trabalharam quase todos com grande facilidade, retirando casos pontuais onde a janela de visualização não estava correta. Senti que os alunos aprenderam o que pretendia e esta pequena exploração trouxe um novo ambiente à aula, ambiente este que o teorema de Tales tinha tornado tão pesado. Apesar de tudo a introdução da noção de declive de uma reta como objetivo da aula, não ficou finalizado, pois os alunos não tiveram tempo para explorar totalmente o assunto. Percebi que a noção geométrica de reta ficou interiorizada nos alunos e que estes compreenderam a necessidade de terem dois pontos.

Ficaram ainda por cumprir os objetivos acerca da relação entre o sinal do declive e a localização da reta no referencial ortogonal e monométrico porque não haveria tempo devido aos atrasos da aula. Decidi terminar a aula com tempo para indicar o trabalho de casa e para realizar a recolha de todo o material produzido pelos alunos.

Esta aula, senti que tive de responder a muitas questões que coloquei, pois este não era um assunto fácil, mas penso que me deu alguma noção de como melhorar no futuro a abordagem a fazer a um assunto como este. Não considero que tenha conseguido atingir todos os objetivos desta aula, mas penso que lancei boas sementes para os atingir na aula seguinte no que respeita à noção de declive. Apesar dos imprevistos e dificuldades, senti que geri melhor a aula, mesmo com alguns imprevistos à mistura.

Aula n.º 5 e n.º6 – 20 de Abril de 2015 (100 minutos). Esta foi uma aula que se iniciou com uma energia única. Os alunos entraram na sala e começaram de imediato a perguntar se iriam voltar a trabalhar com a calculadora. Os primeiros minutos da aula foram dedicados aos comentários e esclarecimentos relativos aos trabalhos de casa, sendo estes uma mais-valia, para perceber como decorriam as aprendizagens e que ajudavam os alunos a esclarecer dificuldades que não evidenciavam no trabalho em grupo.

Esta aula correu muito melhor que a anterior, pois esclareci e relembrei os comandos que deveriam ser usados na calculadora gráfica para realizarem a exploração e foi imediato o envolvimento dos alunos. Esta decisão relaciona-se com o facto de ter recolhido os esboços das retas, feitos pelos alunos na aula anterior. A maioria dos alunos acabou por realizar nesta segunda aula, ambas as explorações, mas sem dar atenção aos pontos a marcar no referencial, mesmo eu tendo exemplificado no quadro. Relativamente aos objetivos que transitaram da aula anterior, os alunos conseguiram atingi-los e retirar as conclusões pretendidas.

Iniciámos o que havia planeado para esta aula com 45 minutos de atraso. Passei então à introdução da noção de ordenada na origem, com alguns alunos a realizarem raciocínios interessantes durante a exploração do exemplo por mim apresentado, realizando um paralelismo entre a interseção da função linear com o eixo das ordenadas e o valor que iria assumir a ordenada na origem no caso da função afim. Penso que esta exploração do exemplo deu uma boa ajuda para as conclusões que os alunos retiraram depois da exploração que elaborei acerca da ordenada na origem. Aqui os alunos já estavam à vontade com a calculadora gráfica, comparavam resultados e já corrigiam os colegas quando detetavam algum erro. O momento mais interessante desta aula foi durante a discussão, pois os alunos foram mais além dos objetivos desta exploração. Os alunos associaram que todas as retas consideradas para a segunda exploração tinham o mesmo declive e eram paralelas. Relativamente às conclusões acerca da ordenada na origem não foram conseguidas pelos alunos e tive de ser eu a evidenciar. Os alunos identificavam o efeito do declive, mas não o efeito da ordenada na origem. Durante a aula decidi que não iria abordar o resto da tarefa 2, como estava no plano de aula inicial, resolvi que ficaríamos pela sistematização das aprendizagens desta exploração. A discussão foi dinâmica e com participação de vários alunos.

A sistematização foi mais complicada e tive de impor um ritmo mais acelerado, para conseguir analisar os três exemplos, pois os alunos já estavam cansados e agitados com a proximidade do fim da aula. Por fim, recolhi as explorações dos alunos e distribuí o trabalho de casa para a aula seguinte.

Esta foi uma aula mais agitada, com mais necessidade de controlar comportamentos ao longo da aula. Notei que quando precisava de iniciar as discussões alguns alunos ainda estavam bastante absorvidos pelas calculadoras ou em conversas com os colegas. Como esta não foi uma aula assistida, notei que os alunos estavam mais irrequietos e brincalhões, o que me fez ter necessidade de parar algumas vezes a aula e perder mais tempo em chamadas de atenção, tornando-a mais cansativa para mim. Mesmo tendo abandonado o plano de aula inicial, fiquei satisfeita com o modo como a aula decorreu e com as aprendizagens dos alunos, penso que este tempo de exploração terá sido muito positivo para os alunos tanto ao nível das aprendizagens quanto do interesse pelo trabalho com funções. Apesar do atraso, a noção de declive e ordenada na origem de uma função afim haviam sido introduzidas e compreendidas pelos alunos. A meu ver, de forma mais consistente a noção de declive e mais trémula a noção de ordenada na origem. Penso que este facto se deve a não termos tido tempo para iniciar a resolução da tarefa 2. Não foram atingidos os objetivos da determinação da expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos, nem os relativos à identificação da ordenada na origem na representação algébrica.

Aula n.º7 e n.°8 – 22 de Abril de 2015 (100 minutos). Esta foi uma aula importante, não só por ser a aula em que os alunos tiveram a oportunidade de construir retas sem ajuda da calculadora gráfica, mas também porque me daria a oportunidade de compreender se se haviam apropriado do processo e observar dificuldades que os alunos pudessem ainda ter.

A correção do trabalho de casa ocupou-me uma parte considerável do tempo da aula, mas sabia que seria importante pois o último exercício estava relacionado com a construção da representação gráfica de funções lineares, que era exatamente o que íamos trabalhar nas restantes questões da tarefa 2, mas com funções afins. A verdade é que durante o trabalho autónomo percebi que este tempo havia trazido bons frutos para o trabalho dos alunos realizado na tarefa 2.

Decidi que teria de abrandar e realizar o trabalho de acordo com o ritmo que os alunos me permitiam. O tempo que restava da aula seria apenas dedicado a terminar e discutir a tarefa 2, para que os alunos pudessem construir a sua aprendizagem ao seu ritmo e não ao ritmo que o calendário me impunha. Existem alunos com ritmos de trabalho muito distintos, pelo que optei por dizer aos alunos que realizassem todas as questões. Os alunos tiveram alguma resistência em construir a representação gráfica de funções afins, pelo que pude perceber que os alunos ainda não distinguiam bem a representação gráfica de uma função afim e de uma função linear. Para muitos alunos se é uma representação gráfica de uma função deve passar na origem do referencial. Alguns alunos tinham esta ideia interiorizada outros estavam apenas desatentos e não liam o enunciado até ao fim, e quando os chamava à atenção, pediam que esquecesse a dúvida. Esta foi uma dificuldade difícil de ultrapassar nesta aula, mas penso que com a paragem da aula que fiz para toda a turma chamando a atenção para o enunciado a questão ficou resolvida.

Com o decorrer do trabalho autónomo esclareci dúvidas e compreendi algumas das dificuldades dos alunos. A correção e discussão mostrou que os alunos conseguiram superar alguns problemas. Ficou ainda por discutir a questão 5 e corrigir e discutir a questão 6 da tarefa 2, por falta de tempo.

Relativamente aos objetivos, muitos alunos conseguiram, por fim, construir representações gráficas de funções de forma correta, conseguiram identificar corretamente o declive e a ordenada na origem de representações algébricas de funções afins e alguns alunos conseguiram construir a equação de uma reta não vertical dados dois pontos. Nem todos os alunos terminaram a tarefa devido aos seus ritmos e dificuldades distintas.

Deste modo estava agora com uma aula de atraso, mas satisfeita com os resultados alcançados nesta aula pelos alunos.

<u>Aula n.º 9 e n.˚10 – 27 de Abril de 2015 (100 minutos).</u> A aula seguiu a estrutura habitual, com a correção do trabalho de casa, por ter resoluções com erros que eu entendi tratar, seguida da discussão do que restava da tarefa 2 e só depois a resolução da tarefa 3.

O trabalho proposto para casa foi problemático pois, além de ter detetado que vários alunos haviam copiado as resoluções erradas dos colegas, só três alunas tinham o trabalho bem feito. Desta vez corrigi todo o trabalho e não parte como havia feito nas outras aulas. O ritmo foi lento, as respostas demoravam, as minhas perguntas iam caindo umas em cima das outras e eu não conseguia avançar, mais uma vez estava eu a fazer o trabalho dos alunos. Acabei por achar que deveria ter dado este trabalho de casa na aula seguinte para que os alunos tivessem uma base mais sólida na construção de equações de retas.

Outra questão problemática na representação gráfica das funções é que os alunos têm tendência a escolher valores grandes para a variável independente para determinar pontos que possam usar para desenhar o gráfico. Por falta de experiência dos alunos e minha, o referencial que coloquei projetado no quadro era um quadrado com 10 por 10 quadrículas, logo os valores teriam de variar dentro de $[-5{,}5]$. Claro que quando os alunos começaram a querer representar valores como $x = 7$, percebi o problema que tinha em mãos. Expliquei este facto aos alunos e aproveitei para pedir que sugerissem valores menores, também para que compreendessem que seria mais fácil, mas também para lhes chamar à atenção que o valor $x = 0$ é um valor simples e importante. Este não só nos diz se estamos a falar de uma função linear ou afim (sabendo que não estavam a ser consideradas funções constantes neste exercício). Durante o trabalho autónomo acabei por perceber que a segunda aluna que chamei ao quadro não havia sido a autora do trabalho que me entregou e acabei por pedir a outro aluno, que não tinha feito o trabalho de casa bem, mas que compreendeu o que era pedido durante a correção para terminar a construção das retas. As últimas duas alíneas foram corrigidas oralmente e efetuei os registos das respostas no quadro. Os alunos já haviam estado no quadro 40 minutos e a aula precisava de outra dinâmica para poder avançar.

Retomámos a discussão da tarefa 2, na questão 5, o aluno havia escrito a resolução no quadro na aula anterior, mas não houve tempo para que pudesse explicar aos colegas como procedeu. Durante o trabalho autónomo percebi que, alguns alunos haviam compreendido como deveriam proceder para resolver a questão, mas estes não eram a maioria, logo era crucial que todos os alunos compreendessem como deveriam proceder para construir a equação de uma reta não vertical dados dois pontos.

Esta aula foi especialmente difícil, ao nível do ritmo porque os alunos estavam adormecidos, cansados e sem vontade de trabalhar. Surgiram ainda dificuldades relacionadas com operações com frações e com números inteiros, mas que resolvi colocando questões que ajudaram os alunos a recordar que afinal até sabiam fazer.

A minha ambição em resolver três questões nos 40 minutos que restavam foi honesta, mas completamente irreal. Momentos depois decidi que iriamos ficar apenas pela primeira questão da tarefa 3 pois o ritmo dos alunos não ajudava e as dificuldades que manifestavam evidenciavam cada vez mais que os alunos não liam, nem consultavam os apontamentos que lhes eram dados diariamente.

Esta é uma turma muito lenta a copiar do quadro e, com o tempo limitado que tínhamos, tomei a decisão de fornecer uma cópia dos diapositivos que serviram de apoio às aulas no final das mesmas. Não foi uma estratégia que resultasse, pois não consegui rentabilizar melhor o tempo da aula. Pelo contrário, muitas vezes tinha que recordar e chamar à atenção dos alunos que deveriam consultar os apontamentos.

Os objetivos planificados para esta aula, não seriam atingidos na totalidade pelo atraso que já tínhamos. Mas os que ainda transitaram da aula anterior, relativos à determinação do declive de uma reta não vertical, determinação da ordenada na origem e construção de representações gráficas foram consolidados e ficaram realmente mais claros para os alunos. Ficaram ainda por abordar os seguintes objetivos: dependendo de como os dados lhes são fornecidos a forma de determinar o declive de uma reta não vertical se mantém e que a representação algébrica de uma função é também a equação da reta que lhe corresponde. Por fim, o problema tinha como objetivo trabalhar a interpretação de resultados, de dados fornecidos e ainda, que os alunos compreendam, que dados são importantes para resolver cada questão, no âmbito das funções lineares, mas estes também não foram atingidos por falta de tempo. Por outro lado os alunos compreenderam como devem proceder para saber se um ponto pertence ou não a uma função, sendo este um aspeto que precisou muito da minha ajuda devido às dificuldades que os alunos apresentavam em efetuar substituições da variável independente.

Aula n.º11 e n.˚12 – 29 de Abril de 2015 (100 minutos). Os trabalhos de casa faziam sempre a abertura da aula, mas no decorrer das aulas percebi que eram momentos importantes para os alunos. Os alunos estão habituados a fazer esta correção diariamente e eram momentos em que os alunos colocavam mais dúvidas.

Nesta aula apenas foram trabalhados os objetivos que ficaram pendentes na aula anterior. Os alunos construíram representações gráficas e algébricas de acordo com diferentes formas de apresentação dos dados no enunciado, sendo este um objetivo que tomou algum tempo da aula. Os alunos estavam a trabalhar a noção de declive e a escrita de expressões algébricas de funções lineares, mas cada alínea tinha uma abordagem diferente para o mesmo processo. Isto gerou confusão inicialmente, mas com o decorrer da aula, os alunos compreenderam que estas eram diferentes situações com que se poderiam deparar.

Esta aula exigiu chamadas de atenção, ao nível das conversas paralelas, pois os alunos desta turma são conversadores, distraem-se com grande facilidade e aproveitam para brincar durante as aulas, sempre que têm uma oportunidade. Nesta aula tive que chamar à atenção de alguns alunos, mas fi-lo solicitando a participação do aluno na aula.

O problema com contexto, da questão 3 foi bem recebida pelos alunos de um modo geral e estes ficaram envolvidos de imediato, não tendo qualquer dificuldade em identificar a expressão algébrica com que tinham de trabalhar. Ao nível da interpretação das soluções à luz do contexto, os alunos também não mostraram dificuldades respondendo corretamente durante a discussão, apesar de alguns não as terem formalizado na tarefa.

Nesta aula, a maior preocupação era deixar os alunos praticar e aprenderem com os seus erros, optei por apoiar os alunos e dar-lhes mais tempo do que havia previsto no plano de aula inicial. Assim, já não foram trabalhadas as questões 4, 5 e 6 da tarefa 3, pois os alunos com o atraso das aulas anteriores e as dificuldades que iam surgindo, iam consumindo cada vez mais tempo da aula.

Ao nível da minha gestão da aula, compreendi que tenho que tentar perceber melhor o ritmo dos alunos. Por outro lado, nesta aula percebi que dar mais tempo aos alunos estava a gerar mais discussões, mas discussões matematicamente interessantes, em que os alunos com mais dificuldades pediam aos colegas para lhes explicar.

Ficaram por atingir alguns objetivos desta aula, como a construção de equações de retas que representam funções afins e construção de representações gráficas de funções afins. Faltou a abordagem a problemas com contexto aplicado às funções afins, onde os alunos iriam interpretar o problema, determinar soluções com a ajuda da função afim e interpretá-las à luz do contexto. Quando digo que ficaram por abordar, não me refiro a todos os alunos, pois deixei os alunos trabalharem mais tempo e apenas parei a aula no final para corrigir em conjunto com a turma, fazendo eu os registos das respostas no quadro até à questão 3. É de realçar que alguns alunos da turma resolveram toda a tarefa 3 nesta aula, daí a dificuldade de gerir uma turma com desempenhos tão distintos.

<u>Aula n.º 13 e n.°14 – 11 de Maio de 2015 (100 minutos).</u> Esta aula realizou-se depois de duas aulas de intervalo, uma para a realização de revisões de toda a matéria e esclarecimento de dúvidas e outra para a realização do teste de avaliação. O plano desta aula prévia que fossem abordados os objetivos relativos à relação entre o declive e o paralelismo de duas retas não verticais. Mas devido aos atrasos

sucessivos esta seria dedicada a terminar a realização da tarefa 3. Esta opção deu-se, depois de ver, a forma empenhada como os alunos tinham trabalhado na aula anterior e o ambiente de entreajuda que se criou dentro da sala de aula. Mesmo assim a aula começou com os comentários iniciais aos trabalhos de casa, que foram corrigidos pelos alunos e esclarecidas algumas dificuldades e erros detetados relacionados com operações com inteiros.

Nesta aula os alunos dedicaram-se então a: construir gráficos e equações de retas de funções afins; resolver equações para determinar soluções relacionadas com expressões algébricas de funções afins; e trabalhar situações com contexto, interpretando o problema, procurando soluções para as questões mobilizando os seus conhecimentos acerca de funções afins, construindo expressões algébricas e interpretando soluções à luz do contexto do problema. Os alunos tiveram, também, a oportunidade de compreender que os conhecimentos aprendidos nas aulas, podem ser aplicados em situações do seu quotidiano. A aula decorreu com muitas questões dos alunos durante o trabalho autónomo, que foram sendo esclarecidas por mim e pela professora cooperante e com a discussão de todas as alíneas em grande grupo e comigo no quadro a realizar o registo das suas respostas. Esta opção foi tomada em conjunto com a professora cooperante, pois trata-se de uma turma que precisa de mais tempo para a realização do trabalho autónomo e em que as discussões acabam por se arrastar quando são os alunos a registar as suas resoluções no quadro pelo que o trabalho é mais produtivo quando os alunos discutem oralmente e o professor faz os respetivos registos escritos no quadro.

Apesar de ter intenção de fazer a introdução da relação entre o declive e o paralelismo de duas retas não verticais nesta aula, tal não se verificou. No decorrer da aula fui percebendo que seria mais importante permitir aos alunos terem mais tempo para a realização da tarefa. Como alguns dos alunos já a tinham realizado na aula anterior, optei por propor alguns exercícios do manual para que esses alunos não ficassem sem trabalho. Os alunos que haviam terminado a tarefa toda na aula anterior foram apenas 4, pelo que não se justificava avançar para a discussão, visto que os restantes estavam atrasados e com algumas dificuldades ligadas ao cálculo do declive e da ordenada na origem de uma função afim. Este tempo mostrou-se esclarecedor para os alunos, pois durante a discussão foram vários os alunos a querer participar. Esta discussão proporcionou um momento interessante durante a discussão do problema que se apresenta na questão 6, alínea 6.1.3), pois alguns alunos responderam que se o cliente pagou 50€, tendo um custo de montagem de 30€ o espaço percorrido até ao local de entrega seria de 20 km, o que estava errado. Os alunos esqueceram-se que o declive da função afim era 2,5, logo o valor 20 teria ainda de ser dividido por 2,5, para determinar a solução de $2{,}5x + 30 = 50$. Este foi um erro realizado por um dos grupos que realizou toda a tarefa 3 na aula anterior. Apesar das indicações para repensarem a questão os alunos mantiveram a sua resposta criando depois esta discussão.

Esta aula foi muito rica no sentido que os alunos consolidaram as aprendizagens realizadas, tiveram a oportunidade de colocar mais questões e realizar exercícios. Mesmo com todo o tempo que fui dando em todas as aulas percebi que este tempo não estava a ser desperdiçado e que os alunos cada vez estavam mais envolvidos no trabalho em grupo e em explicar aos colegas.

Outra questão interessante foi a iniciativa dos alunos em se juntarem em alguns grupos maiores, com a minha autorização. Estes dois grupos maiores promoveram entreajuda e discussões proveitosas entre os alunos acerca dos conceitos que aprenderam.

Ficaram assim por atingir os objetivos relacionados com a relação entre o declive e o paralelismo de duas retas não verticais, que foram retomados na aula seguinte

<u>Aula n.º 15 – 13 de Maio de 2015 (100 minutos).</u> Nesta aula foi então debatida a questão da relação entre o declive e o paralelismo de duas retas não verticais. Esta relação não era em parte novidade, pois os alunos durante a exploração da noção de ordenada na origem haviam concluído que, se as retas tinham todas o mesmo declive, eram paralelas. Foi trabalhada a implicação no sentido oposto, recorrendo a um exemplo de aplicação. Partindo de duas retas paralelas foram deduzidas as equações de cada uma das retas e verificou-se que têm o mesmo declive.

Em seguida, os alunos trabalharam autonomamente as tarefas do manual, que haviam sido selecionadas. Acompanhei como sempre o trabalho autónomo dos alunos, colocando questões e tentado detetar as possíveis dificuldades e ajudando os alunos a ultrapassá-las.

Esta primeira parte da aula deu então oportunidade de atingir os últimos objetivos definidos para esta unidade. O restante tempo foi dedicado à introdução da resolução dos sistemas de equações.

A grande dificuldade que senti relacionou-se mais com a gestão do tempo da aula, estes tempos foram completamente ultrapassados e senti mesmo a necessidade de os esquecer para o bem da aprendizagem desta turma. Não é fácil gerir alunos com ritmos tão diferentes e com necessidades tão específicas, cada um deles.

Métodos e procedimentos de recolha de dados

Para elaborar este estudo defini como objetivo compreender as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins, no 8.º ano de escolaridade. Propus-me responder às seguintes questões: "Que estratégias os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins?", "Que dificuldades revelam os alunos na construção e interpretação de gráficos de funções afins?" e "Que dificuldades evidenciam os alunos na representação algébrica de funções afins a partir da representação gráfica?". Para responder a estas questões de forma coerente e fundamentada, selecionei e analisei os dados recolhidos de acordo com a sua relevância para cada uma das questões formuladas.

Para iniciar o meu trabalho comecei por me centrar nos conteúdos, que seriam lecionados nas aulas, de forma a conseguir compreender qual a melhor forma de os sequenciar para que fizessem sentido para os alunos. Debrucei-me, então, sobre o programa e metas curriculares de matemática do ensino básico de 2013 e ainda sobre o programa de matemática do ensino básico de 2007, sendo estes dois documentos que me acompanharam e ajudaram na tomada de decisões. Já com os conteúdos, do domínio de funções, organizados construí os materiais para cada aula, de modo a que a partir daí pudesse recolher os dados necessários para tentar responder às minhas questões de estudo. Assim, os dados foram recolhidos da seguinte forma:

Observação. A observação, um processo de recolha de dados, muito usado pelos professores em sala de aula, foi fundamental para o meu estudo. Na sequência da observação realizei, também, pequenos registos durante a aula, principalmente de situações que me pudessem ajudar a responder às questões do estudo. Estes registos eram pequenas notas, que eu ia apontando para cada questão, na minha resolução de cada tarefa que os alunos se encontravam a realizar. Nestas pequenas notas, ia registando o tipo de dificuldades que surgiam e que alunos as manifestavam. Acompanhei de forma atenta, a turma durante o trabalho realizado ao longo das aulas.

Para complementar a observação, coloquei três gravadores, junto de três pares de alunos previamente selecionados devido ao seu empenho, interesse e constante participação nas aulas. Estas gravações registaram interações entre os alunos, interações entre os alunos e a professora e momentos de discussão em grande grupo.

Não tendo colega de estágio que pudesse realizar anotações de possíveis situações interessantes, esta foi a estratégia utilizada para que não dependesse exclusivamente da minha memória.

Recolha documental. No final de cada aula, recolhi todas as tarefas (Anexo VII, Anexo VIII e Anexo IX) com as resoluções dos alunos e, terminada a lecionação da unidade de ensino, propus uma questão de aula, Questão de aula n.º 5 (Anexo XIV), que fez parte da avaliação dos alunos e cuja resolução também recolhi. Esta recolha permitiu-me digitalizar as produções escritas dos alunos e recolher dados sobre os processos escolhidos e as dificuldades evidenciadas. Finalmente, recolhi e corrigi todos os trabalhos de casa realizados pelos alunos ao longo da lecionação da unidade.

Entrevistas. A Questão de aula que propus no final da unidade, serviu de base às entrevistas que realizei a alguns alunos de forma a obter mais esclarecimentos e evidências que pudessem contribuir para responder às questões do meu estudo.

Estas entrevistas foram realizadas a cinco alunos. De acordo com uma análise prévia do que os alunos responderam, por escrito, na Questão de aula referida, e com a ajuda da professora cooperante, foi realizada a seleção dos alunos a entrevistar. Uns pelas dificuldades evidenciadas, outros para obter mais elementos sobre a primeira questão do meu estudo e assim conseguir uma melhor compreensão das estratégias que os alunos usaram na resolução das tarefas. Finalmente, todos os alunos selecionados para as entrevistas eram alunos que participaram sempre de forma ativa nas aulas e foram empenhados na sua aprendizagem.

4 - Análise e reflexão

De acordo com o objetivo e as questões que defini, a análise dos dados está organizada em duas partes: as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins, e, as dificuldades dos alunos em tarefas acerca de gráficos de funções afins.

Estratégias na resolução de tarefas

No que diz respeito às estratégias utilizadas na resolução das tarefas propostas, distingui duas grandes categorias para analisar os dados recolhidos. Estas duas categorias relacionam-se com o tipo de abordagem seguida pelos alunos durante a realização das tarefas e optei por caraterizar as estratégias seguidas pelos alunos usando as que foram trabalhadas nas minhas aulas: abordagem gráfica, abordagem algébrica.

Apesar de os alunos se encontrarem apenas no início o estudo das funções, o trabalho realizado em sala de aula tentou envolver as duas abordagens de forma equilibrada.

Abordagem gráfica. Durante o trabalho em sala de aula, pude verificar, que alguns alunos recorriam a estratégias para a realização das tarefas que se baseavam numa abordagem gráfica, servindo-se dos seus conhecimentos sobre a representação gráfica de uma função para responder às questões propostas e justificar as suas respostas.

Um exemplo em que os alunos estiveram a explorar representações gráficas de funções para compreender intuitivamente a noção de declive de uma reta, com o auxílio da calculadora gráfica, surge na terceira aula. Os alunos tinham que realizar duas explorações. Estas explorações permitiram aos alunos retirar conclusões e consolidar os seus conhecimentos, bem como dar os primeiros passos na construção de representações gráficas. A exploração a realizar foi proposta no seguinte diapositivo:

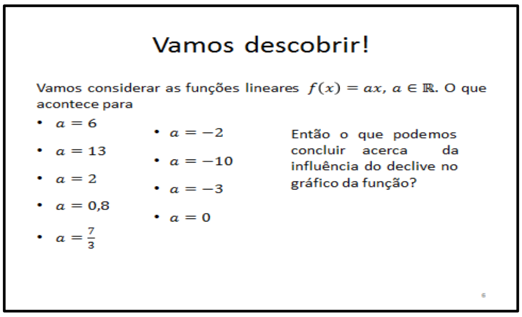


Figura 4 – Apoio da aula 2, diapositivo n.°6

Neste exemplo era esperado que os alunos fossem capazes de compreender o efeito da variação do declive na representação gráfica de uma função linear. É de salientar que, apesar de os alunos mostrarem dificuldades na exploração pedida, foram capazes de retirar conclusões interessantes, mobilizando conhecimentos do ano letivo anterior, como é o caso da Maria para esta primeira exploração:

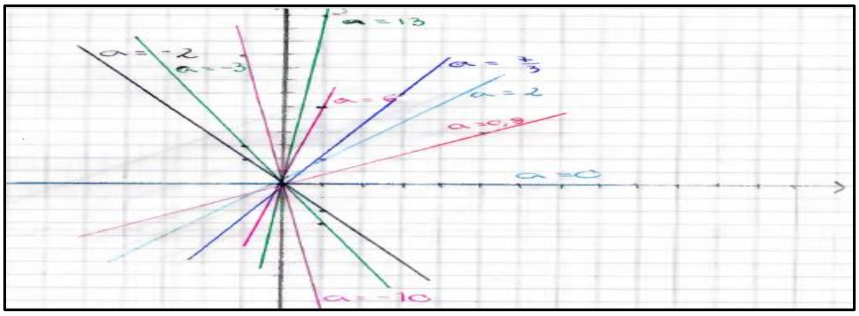


Figura 5 – Exploração da variação do declive de uma reta, resolução da Maria

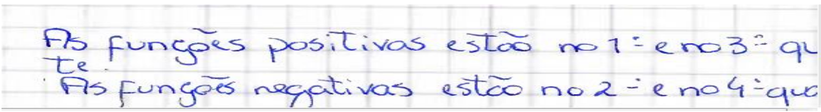


Figura 6 – Conclusão da exploração da variação do declive de uma reta, resolução da Maria

A aluna utilizou os seus conhecimentos do ano letivo anterior para estabelecer uma relação entre os diferentes gráficos de funções lineares e os quadrantes em que se encontram. Aqui a aluna deveria ter escrito funções de declive positivo (ou negativo), mas a exploração foi realizada na aula de introdução da noção de declive de uma reta, logo é natural que os alunos ainda tivessem alguma falta de rigor na forma de exprimir as suas conclusões. Este facto foi depois corrigido por mim na discussão da exploração em conjunto com a turma.

Ainda nesta aula foram realizadas duas explorações, uma acerca do declive de uma função linear e outra acerca da ordenada na origem de uma função afim, e foram discutidas na mesma aula, de modo a que os alunos tivessem o maior tempo possível para a construção das representações gráficas. Esta construção foi algo demorada não só por ser a primeira vez no ano que estavam a construir gráficos, mas, também, porque começavam por a realizar com a ajuda da calculadora gráfica que ainda não dominavam. A discussão proporcionou momentos interessantes como quando pedi a apresentação das conclusões a partir da observação dos gráficos, em primeiro lugar para o declive positivo, com todas as retas de declive positivo projetadas no quadro, depois as de declive negativo. Veja-se a este propósito o diálogo a seguir transcrito:

Professora: São todas as retas de declive positivo. O que podem observar acerca de todas as retas de declive positivo?

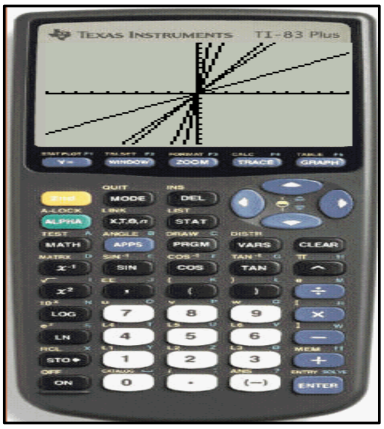


Figura 7 – Projeção de retas todas de declive positivo

Maria: Ficam no primeiro e terceiro quadrante.

Pedro: Estão todas inclinadas para a direita.

(...)

Professora: Agora vamos ver as retas de declive negativo, o que acontece agora?

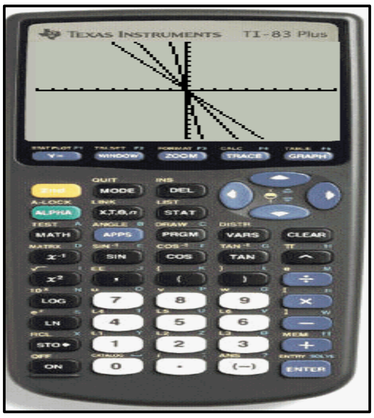


Figura 8 – Projeção de retas todas de declive negativo

Vários alunos: Estão no 2.º e 4.ºquadrantes.

Professora: Vamos ver a reta $y = 0$. Todos me estão a questionar acerca desta reta. Como é que acham que fica esta reta?

Miguel: É um pontinho no meio…

Professora: Vou fazer [nesta altura introduzi a equação $y = 0$, *no software que instalei no meu computador, que me permitia projetar uma calculadora gráfica, igual à que os alunos tinham. Para que os alunos pudessem ver melhor, alterei o tipo de linha com que a função iria ser desenhada, para um tipo de linha mais denso.]*

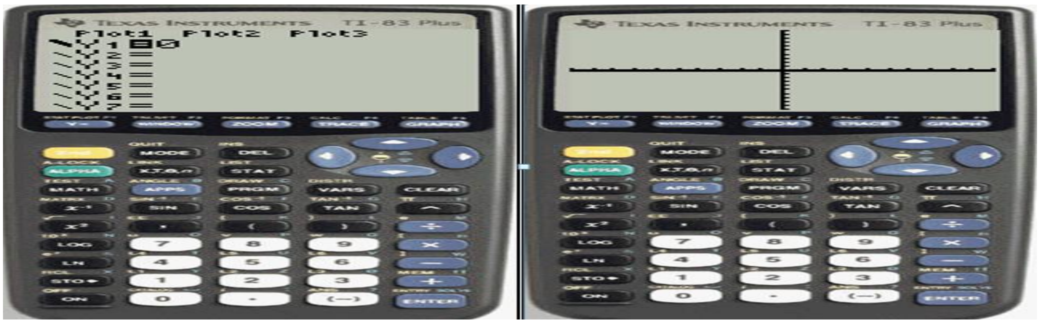


Figura 9 – Projeção da reta y=0

Professora: Viram "a linha mais grossa a ser desenhada" [no ecrã]?
Vários alunos: Sim.
Professora: Se vocês forem à tabela da calculadora, o que observam nas imagens [da função]?
Catarina: São todas zero.
Professora: Então é uma função de que tipo?
Catarina: Constante.

[registo áudio da aula, 20 de Abril]

Este diálogo, que se deu durante a discussão, mostra o tipo de conclusões interessantes que cada aluno foi capaz de realizar. Na visualização das retas de declive positivo, a Maria situa as retas e delimita a sua localização no referencial ortogonal e monométrico de forma rigorosa. No que diz respeito à resposta do Pedro, centra-se na observação apenas das retas, onde o aluno fala acerca da sua posição relativa, chamando a atenção para a inclinação de todas as retas que estavam projetadas (de declive positivo). A resposta do Pedro é menos rigorosa que a da Maria, pois a aluna refere-se às retas na sua posição no referencial, mostrando uma observação atenta e ter-se apropriado das noções aprendidas na sala de aula. No que diz respeito, às conclusões sobre da reta $y = 0$, a resposta do Miguel mostra o tipo dificuldades que podemos encontrar, pois o aluno não associa que estamos a falar de retas. O Miguel considera que é um ponto, pois na altura não conseguia visualizar a reta na máquina de calcular, (eu ainda não tinha ensinado a realizar a mudança de linha no visor da máquina).

Esta exploração foi realizada a partir da apresentação de um diapositivo sobre a determinação da equação de uma reta (ver figura 10), e destaco a intervenção de um aluno que apresento a seguir.

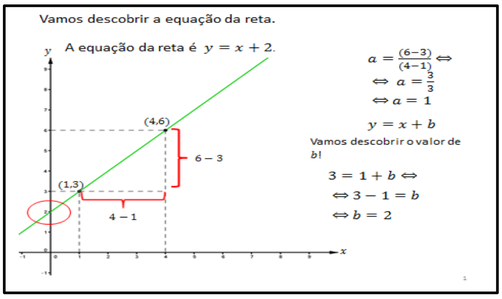


Figura 10 – Apoio da aula 3, diapositivo n.° 3

Professora: Como é que vocês acham que vamos determinar o b?
Ricardo: Professora, quando estávamos na função linear, a reta passava no zero, na origem, por isso agora a reta passa no 2, por isso o b é 2.
[registo áudio da aula, 20 de Abril]

Esta conclusão foi sugerida pelo aluno apenas por observação das diferentes representações gráficas durante a primeira exploração e confrontado com o exemplo dado no diapositivo. Repare-se que esta foi uma estratégia puramente gráfica usada pelo aluno para chegar à conclusão que pretendíamos. Outro momento importante ocorreu durante a discussão acerca da ordenada na origem de uma função afim:

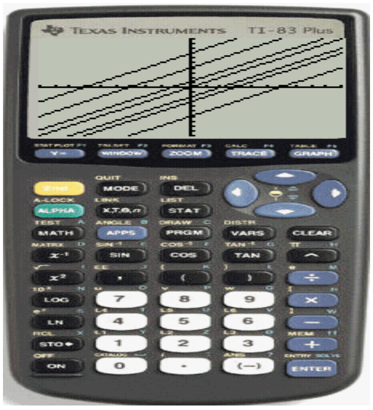


Figura 11 – Projeção de retas todas de declive um e com diferentes ordenadas na origem

Optei por projetar todas as retas porque a aula estava a terminar. Foi nesta altura que se desenrolou o seguinte diálogo:

Professora: O que é que podemos observar?
Maria: Que todas as retas são paralelas.
Professora: Então e que característica têm estas retas em comum?
Ricardo: O declive.
Maria: São paralelas e o declive é o mesmo.
Professora: Muito bem, então quando eu tenho o mesmo declive as retas são paralelas. E o que é que eu mudei?
Ricardo: A origem.
Professora: A ordenada na origem, não é origem, é ordenada na origem. O que é que isso vai implicar nas minhas retas? Porque é que lhes chamamos

ordenada na origem? Olhem para o quadro… Porque é onde a minha reta interseta o eixo…

Joana: Do y.

[registo áudio da aula, 20 de Abril]

Estas duas explorações, de abordagem puramente gráfica, em que os alunos tiveram como o auxílio a calculadora gráfica, tiveram grande importância na construção dos conhecimentos por parte dos alunos. Este facto ficou a dever-se à possibilidade de construção de diversas representações gráficas, com rapidez e precisão, bem como à possibilidade de visualização imediata dessas representações e comparação com outras representações gráficas já conhecidas. Nesta aula, os alunos não retiraram a conclusão de que a ordenada na origem é a interseção da reta do gráfico da função com o eixo dos yy, mas a meu ver, é de destacar a conclusão que conseguiram tirar sobre a relação entre o declive das retas e o seu paralelismo numa fase tão precoce, o que é também uma evidência de que as tecnologias dentro da sala de aula, didaticamente bem enquadradas, são sempre bem-vindas.

O próximo exemplo retrata uma situação na quarta aula, em que foi pedido aos alunos que representassem graficamente e algebricamente funções. No acompanhamento que realizei do trabalho autónomo pude perceber que os alunos davam uma extrema importância à representação gráfica da função, "esquecendo" a representação algébrica, talvez ainda um pouco influenciados pelo trabalho feito nas aulas anteriores. De facto, observei que grande parte dos alunos realizava a representação gráfica da função em primeiro lugar e depois a representação algébrica, em geral apenas depois de eu lhes chamar a atenção para isso. Um exemplo em que se observar este tipo de situação é o da tarefa 3, questão 2, realizada pela Raquel, na figura 12.

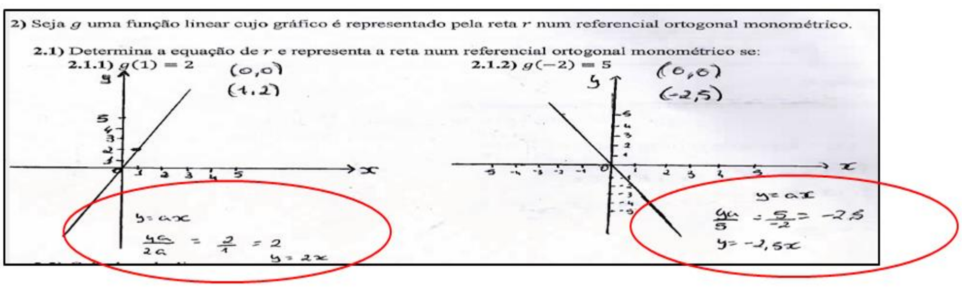


Figura 12 – Tarefa 3, questão2, resolução da Raquel

Quando acompanhei o trabalho autónomo, verifiquei que a aluna começou por construir a representação gráfica de cada uma das funções, primeiro a da questão 2.1.1) e em seguida a da questão 2.1.2). Percebi que a aluna não tinha escrito a equação da reta, em ambas as alíneas, perguntei-lhe se já havia terminado a resolução e ela respondeu que sim. Pedi, então, à Raquel que voltasse a ler a alínea 2.1) de novo e voltei a questioná-la, tendo a aluna compreendido que não havia respondido à questão e continuou o seu trabalho para terminar a resolução. Analisando a resolução, percebe-se que a aluna reserva a maior parte do espaço para a construção das representações gráficas encaixando a determinação da equação da reta no restante espaço e que, apesar dos erros, a equação final está correta.

Depois desta terceira tarefa, onde os alunos aplicaram os seus conhecimentos e treinaram a construção de representações gráficas partindo de diferentes situações, surgiram ainda outros exemplos na questão de aula nº 5. Nesta questão pude compreender, pela resolução da Maria da pergunta 1 (figura 13), que o caráter aberto da questão lhe dava novamente a oportunidade de utilizar a estratégia com que se identificasse mais.

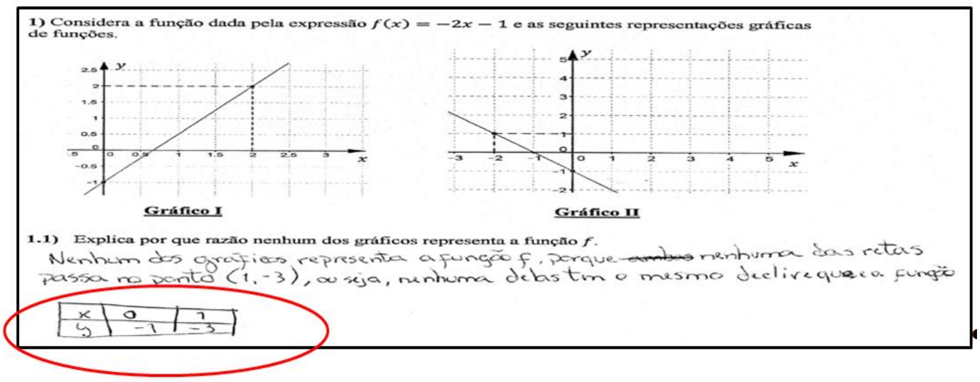


Figura 13 – Questão de aula n.º 5, resolução da Maria

Neste caso, é possível compreender que a aluna determina dois pontos do gráfico da função f e facilmente concluiu que nenhum dos gráficos apresentados, I e II, é a representação gráfica da função f. Outro aspeto interessante desta resolução relaciona-se com o que a Maria diz na segunda parte da explicação, onde apresenta uma segunda justificação. A aluna conclui que nenhuma das funções tem o mesmo declive que a função f. Analisando a resolução da Maria é visível que, em primeiro lugar, a aluna calculou a imagem pela função f do ponto comum às três funções, $(0, -1)$, a seguir escolheu o objeto 1 e obteve como imagem -3. A aluna sabe que para desenhar a representação gráfica da função f precisa de dois pontos e sabe que nenhum dos gráficos representa a função f, por isso, calcula um segundo ponto $(1,-3)$. Como a imagem do objeto 1, tanto no gráfico I, como no gráfico II é diferente de -3, a aluna justifica que nenhuma das representações corresponde à representação gráfica de f. A Maria mostra ainda, que compreende a noção de declive, pois na segunda explicação escreve que nenhuma das funções tem o mesmo declive. A Maria compreende que, se todas as funções têm ordenada na origem comum e um outro ponto de cada uma delas distinto, cada uma das três retas tem necessariamente uma inclinação diferente, logo declives distintos. A aluna compreende a noção de declive e relaciona-o com a inclinação da reta, porque a aluna sabe, que os pontos $(0,-1)$ e $(1,-3)$ pertencem à representação gráfica da função f, o que confere uma determinada inclinação à reta, que não coincide nem com o caso do gráfico I, nem do gráfico II. Apesar de o ponto $(0,-1)$ pertencer a ambos os gráficos, o ponto $(1,-3)$ não pertence a nenhum, o que faz com que a aluna através da observação tanto do gráfico I como do gráfico II retire esta conclusão.

Por fim, um último exemplo deste tipo de abordagem nas estratégias usadas pelos alunos surgiu também na mesma pergunta da questão de aula n.º 5, mas desta vez através de uma resposta ambígua de um aluno (figura 14). O Miguel acabou por esclarecer a forma como pensou, para elaborar a sua resposta, na entrevista realizada (ver extrato que apresento a seguir).

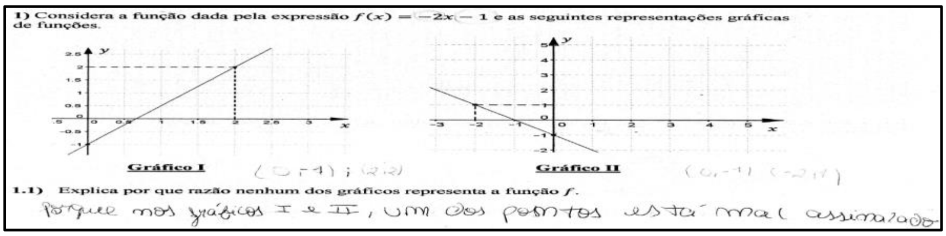


Figura 14 – Questão de aula n.º 5, resolução do Miguel

Professora: Miguel podes ler a primeira questão novamente e explicar o que escreveste?

Miguel: Então deixe-me ver…ah, vi aqui este pontinho $(0,-1)$.

Professora: Que ponto é esse?

Miguel: Como assim professora?

Professora: É um ponto do gráfico?

Miguel: Sim. Vi o ponto $(2,2)$ *e assinalei-os aqui [apontou para os pares ordenados escritos na folha por baixo do gráfico I].*

Professora: E no outro gráfico [gráfico II], fizeste o quê?

Miguel: O mesmo…

Professora: Então e tu escreveste " porque nos gráficos I e II, um dos pontos está mal assinalado", o que queres dizer com isto?

Miguel: Por aquilo que eu me lembro, eram estes dois últimos [o aluno aponta para o ponto (2,2) *e para o ponto (-2,1)].*

Professora: Então, vamos ver, o ponto (2,2) *está mal assinalado em relação a qual?*

Miguel: Por exemplo eu aqui [aponta para a expressão algébrica da função f*] substituí o* x *por 2 e aqui [volta a apontar para a ordenada do par (2,2)] não me deu o resultado 2.*

Professora: Então tu substituíste o x *por 2 onde?*

Miguel: Na expressão dada.

Professora: E não obtiveste 2 como…

Miguel: O resultado.

Professora: Ou imagem.

Miguel: Sim.

Professora: Então tu excluíste este gráfico I porque substituíste a abcissa 2 e não te deu imagem 2, foi isso?

Miguel: Sim, foi isso.

Professora: E no gráfico II?

Miguel: Da mesma maneira.

[entrevista]

A resposta escrita do aluno não apresentava qualquer justificação válida para a questão colocada, mas o aluno conseguiu explicar a sua resposta, por palavras, com a minha orientação.

Na mesma questão, surge ainda a abordagem de um outro aluno, o Tiago, que centra a sua resposta na observação e análise dos gráficos I e II comparando cada um destes com a função f.

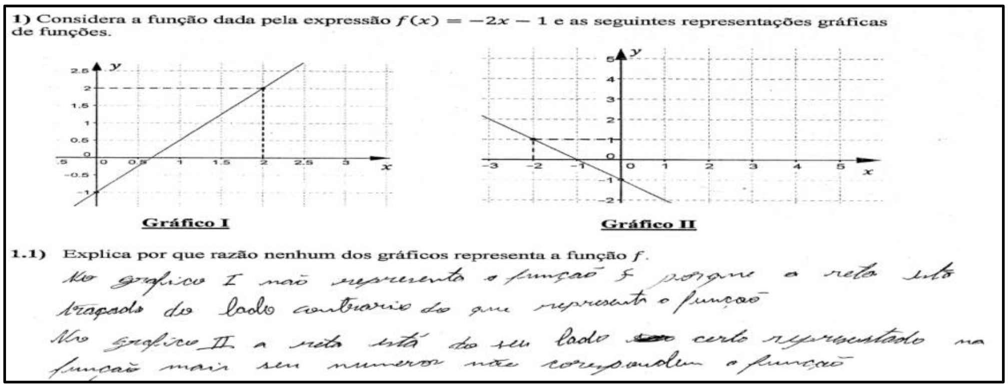


Figura 15 – Questão de aula n.º 5, pergunta 1, resolução do Tiago

A explicação que o Tiago dá não é clara, por questões de português, mas o que diz na frase "a reta está traçada do lado contrário do que representa a função" relaciona-se com a noção de declive de uma reta e dá a entender que o aluno conhece o efeito da variação do declive na localização da reta no referencial. O Tiago sabe que a função f, tem declive negativo, como a função representada no gráfico I. Já no que respeita ao gráfico II e à função f, o aluno compreende que a função representada no gráfico II e a função f têm declive negativo, mas não consegue explicar em linguagem matemática correta as suas ideias.

Um outro exemplo, em que os alunos tiveram de recorrer à análise do gráfico para responder à questão colocada, é o exercício do manual que apresento na figura 16 com a resposta do aluno Pedro, em que se percebe que observou no gráfico que as retas s e t são paralelas. Recorreu depois, à relação entre o declive e o paralelismo de duas retas para identificar corretamente as que têm o mesmo declive.

7 No referencial ortogonal e monométrico da figura encontram-se representadas as retas *r*, *s* e *t*.
Indica as retas que têm o mesmo declive. Justifica.

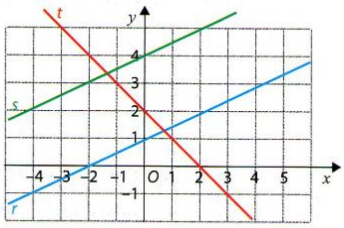


Figura 16 – Exercício do manual, página 106

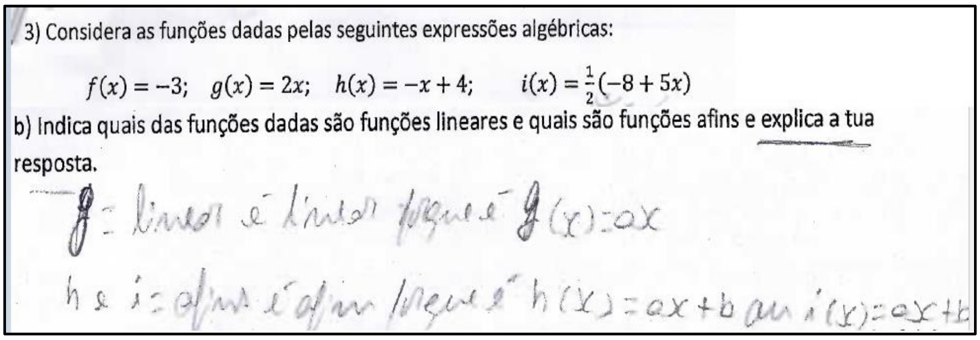
Pág. 106
7. s e r, porque se duas retas não verticais são paralelas, então têm o mesmo declive.

Figura 17 – Exercício do manual, resolução do Pedro

Todos alunos confrontados com as questões acima indicadas, optaram por usar estratégias e realizar análises tendo por base uma abordagem gráfica. Grande parte dos exemplos poderiam ser, também, abordados de forma algébrica. A exploração e análise dos gráficos tiveram um papel importante na aprendizagem dos alunos e proporcionou-lhes a oportunidade de, através da visualização, retirar conclusões pretendidas e outras que não estavam previstas.

Abordagem algébrica. Nesta secção, exponho exemplos de resoluções de alunos, diálogos retirados de discussões nas aulas e das entrevistas que mostram o caráter algébrico da estratégia seguida na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins.

Apesar de, desde a primeira aula, existirem exemplos de que os alunos utilizam a abordagem algébrica como estratégia de resolução das tarefas, a partir da terceira aula comecei a notar que os alunos recorriam cada vez mais a estratégias com este tipo de abordagem. Um primeiro exemplo surge na tarefa 1, de que apresento a resposta do Ricardo à questão 3 (figura 18).


3) Considera as funções dadas pelas seguintes expressões algébricas:

$f(x) = -3;\quad g(x) = 2x;\quad h(x) = -x + 4;\quad i(x) = \frac{1}{2}(-8 + 5x)$

b) Indica quais das funções dadas são funções lineares e quais são funções afins e explica a tua resposta.

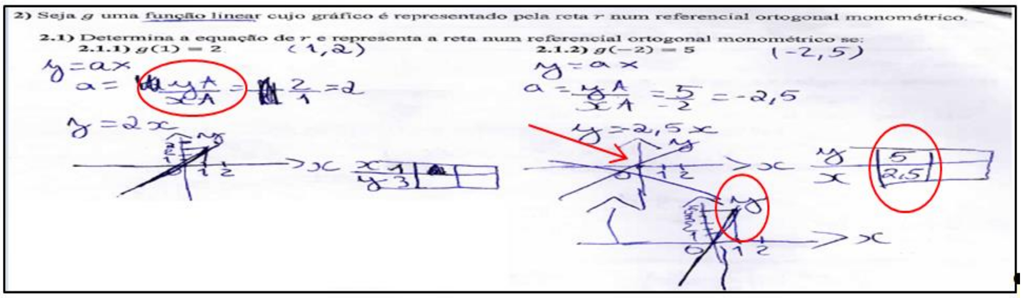
g: linear é linear porque é g(x)=ax

h e i: afim é afim porque é h(x)=ax+b ou i(x)=ax+b

Figura 18 – Tarefa1, questão 3, resolução do Ricardo

Neste exemplo, o aluno realiza a distinção entre os dois tipos de funções e justifica a sua resposta, recorrendo à expressão algébrica genérica de uma função linear e de uma função afim. É de salientar que a função *i(x)*, não se encontra expressa na sua forma mais simples mas, na alínea anterior os alunos haviam escrito a sua expressão algébrica na forma canónica. Assim, o aluno justifica que a função *i(x)* é uma função linear, escrevendo que esta pode exprimir-se sob a forma da expressão algébrica de uma função afim.

No próximo exemplo, os alunos tinham de representar a função dada quer graficamente, quer algebricamente usando a equação da reta do gráfico (figura 19).


2) Seja g uma função linear cujo gráfico é representado pela reta r num referencial ortogonal monométrico.

2.1) Determina a equação de r e representa a reta num referencial ortogonal monométrico se:

2.1.1) $g(1) = 2$ (1,2)

y=ax

a= y A/x A = 2/1 = 2

y=2x

2.1.2) $g(-2) = 5$ (-2,5)

y=ax

a= y A/x A = 5/-2 = -2,5

y=2,5x

Figura 19 – Tarefa 3, questão 2, resolução do Pedro

Neste caso, a abordagem algébrica realizada pelo Pedro é clara e realizada com sucesso, mostrando que sabe indicar como se calcula o declive de uma função linear, para um ponto $(x_{A,}y_A)$ qualquer, (o aluno não escreve A em índice) que pertença à função. Relativamente à representação gráfica, o aluno identifica que lhe é dado um ponto da função linear, mas tem dificuldade em escrever a escala de cada um dos eixos do referencial, na alínea 2.1.1). No que diz respeito à alínea 2.1.2), o

Pedro na sua primeira tentativa, desenha o gráfico de uma função linear qualquer, pois não assinala o ponto que lhe é dado no referencial. O aluno realiza, uma segunda tentativa, onde já utiliza o ponto que lhe é dado, mas percebe-se que a escala continua mal dividida em cada um dos eixos do referencial. A representação gráfica, não está bem desenhada, pois vê-se no esboço (no canto inferior direito) que a reta "termina" no ponto dado, o que não é correto. O Pedro mostra ainda dificuldades em exprimir a função através da representação em tabela, como podemos observar na figura.

Ao acompanhar o trabalho autónomo, pude perceber que o Pedro foi um dos únicos alunos que tentou determinar em primeiro lugar a equação da reta e só depois realizou a representação gráfica. O próximo exemplo (figura 20) revela que o Pedro tem à vontade na utilização de estratégias algébricas, apesar de algumas imprecisões na escrita.

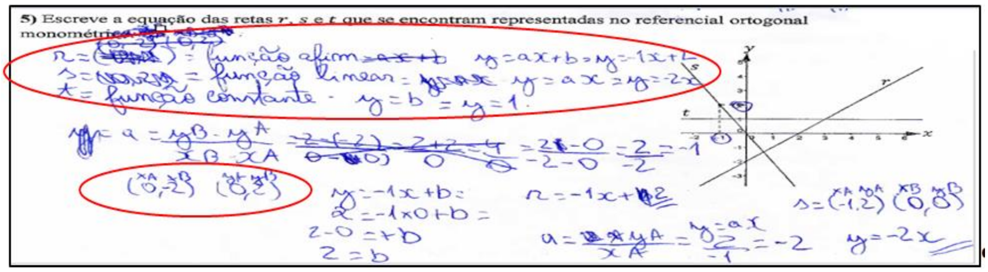


Figura 20 – Tarefa 3, questão 5, resolução do Pedro

O aluno mostra, também, dificuldades relacionadas com análise gráfica, como se observa pelos cálculos incorretos e a confusão feita ao escrever dois pontos da reta r. É ainda evidente que o aluno se apoia nos seus conhecimentos algébricos, sentindo a necessidade de identificar cada um dos tipos de funções que conhece e as respetivas equações. Ao analisar esta questão, no caso do Pedro, assumi que a determinação da ordenada na origem, por processos algébricos se relaciona com as suas dificuldades m ler pontos de um gráfico. Nas aulas, o aluno evidenciou dificuldades de leitura dos pontos das representações gráficas de funções e confusões entre qual o eixo das abcissas e qual o eixo das ordenadas, entre outras que serão mais tarde abordadas.

O exemplo seguinte é a resolução do Daniel da mesma questão (figura 21).

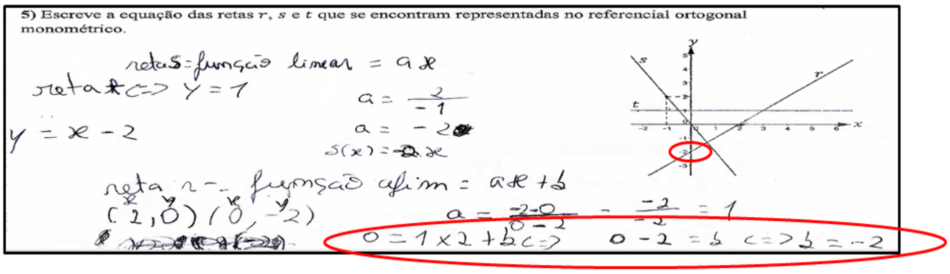


Figura 21 – Tarefa 3, questão 5, resolução do Daniel

Repare-se que, para a determinação da equação da reta *r*, não ocorre ao aluno que pode obter a ordenada na origem apenas por observação do gráfico e opta pelo processo algébrico para a determinar. Neste caso, da função afim, a questão foi construída para dar a oportunidade aos alunos de optar pela estratégia com que se sentissem mais à vontade. O facto é que, ou os alunos não resolveram a questão, ou quem resolveu, recorreu a processos algébricos para determinar a ordenada na origem.

O exemplo que se segue, retirado da Questão de aula n.º 5, é mais um exemplo de como os alunos podem, mesmo quando confrontados com as representações gráficas das funções, não recorrer a uma estratégia gráfica. Observei que a aluna recorre aos seus conhecimentos e utiliza a estratégia algébrica para determinar o declive de uma de uma reta para justificar a sua resposta (figura 22).

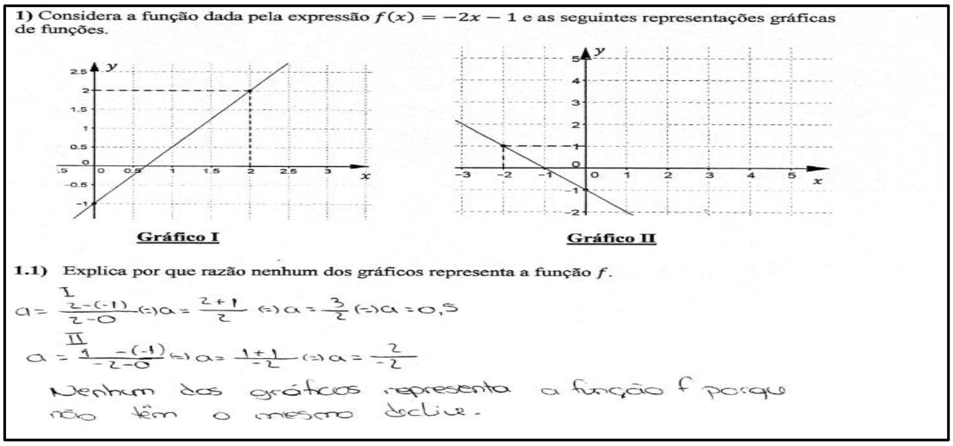


Figura 22 – Questão de aula n.º 5, pergunta 1, resolução da Catarina

Esta aluna foi entrevistada, tendo-lhe sido pedido que explicasse a sua resposta. É interessante a forma coerente como a aluna descreve o processo que seguiu, revelando que a sua aprendizagem foi bem conseguida, como podemos perceber pelo extrato da entrevista a seguir apresentado.

Professora: Podes explicar como procedeste para resolver a questão 1.1)?

Catarina: Então, calculei o declive para saber qual delas [aluna aponta para as retas representadas nos gráficos I e II] é que representava a função f. Tinha de ter o mesmo declive [da reta correspondente à função dada].

Professora: Então, mas alguma delas [gráficos I e II] é a representação gráfica da função f?

Catarina: Não.

Professora: Então como é que fizeste?

Catarina: Calculei o declive, como nenhuma deu, quer dizer que não é…

Professora: Como é que calculaste o declive?

Catarina: Subtraí os dois y dos dois pontos e dividi pela subtração de dois x, desses dois pontos.

Professora: Fizeste o quociente entre a diferença entre as ordenadas e a diferença das abcissas de dois pontos, certo?

Catarina: Sim.

Professora: Com os dois pontos que foste buscar onde?

Catarina: Ao gráfico. [a aluna apontou para o gráfico I]

Professora: E o declive deu?

Catarina: 0,5.

Professora: E no gráfico II, fizeste da mesma forma?

Catarina: Sim, só que com os dois pontos que tirei do gráfico II.

Professora: Os que estão marcados no gráfico II?

Catarina Sim.

Professora: E depois?

Catarina: O declive dava 2 a dividir por -2, que é -1.

Professora: O declive do gráfico II dava -1 e o do gráfico I dava 0,5 e então?

Catarina: Nenhum deles representava a função f porque não tinha o mesmo de declive, que era -2.

Professora: Em relação à ordenada na origem eu podia concluir que as funções não representavam a função f?

Catarina: Não sei….Não.

Professora: Porquê?

Catarina: É sempre -1.

Professora: Consegues indicar outra estratégia para resolver a questão?

Catarina: Não, só a partir do declive.

[entrevista]

Questionei a aluna, acerca de outro processo (gráfico) para resolver a questão, mas a aluna afirmou preferir o tipo de estratégia que usou, que aliás também utilizou para responder à alínea 1.2. Neste caso, a Catarina podia ter retirado a ordenada na origem através da observação do gráfico, mas continua a escolher o processo algébrico como podemos perceber na figura 23 e na explicação que a aluna deu na entrevista e que eu apresento logo a seguir.

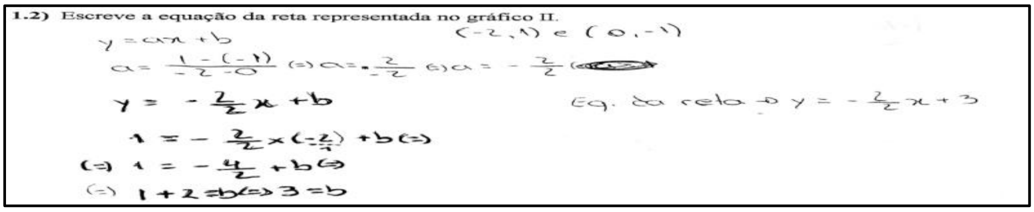


Figura 23 – Questão de aula n.º5, alínea 1.2, resolução da Catarina.

Professora: Podes explicar como procedeste para resolver a questão 1.2?

Catarina: Calculei o declive a partir dos dois pontos do gráfico II. Depois substituí o y *e o* x *por um dos pontos [a aluna apontou para a equação da reta] e calculei o* b. *E enganei-me porque pus* $\frac{-4}{2}$ *e devia ter sido* $\frac{4}{2}$ *e dava* $b = -1$. *E depois escrevi a equação da reta.*

(…)

Professora: Agora que sabes que podias determinar o b de outra maneira, de que forma farias?

Catarina: Desta, na mesma.

Professora: Porquê?

Catarina: Prefiro esta.

[entrevista]

Ainda outro exemplo desta aluna, também na resolução da Questão de aula n° 5, na pergunta 2.

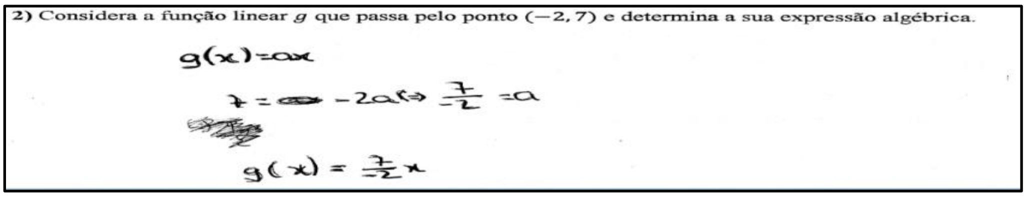


Figura 24 – Questão de aula n.º5, pergunta 2, resolução da Catarina

Neste caso a Catarina tinha de usar o processo algébrico, mas é interessante que a aluna recorre à expressão algébrica de uma função linear para chegar à resposta correta, apesar de eu não ter ensinado este processo.

Apesar de terem sido discutidas com os alunos outro tipo de estratégias, estas foram as escolhidas pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins.

Dificuldades na resolução das tarefas

Decidi chamar, apenas, “Dificuldades na resolução das tarefas” a esta segunda parte da análise dos dados que será subdividida em duas secções com exemplos relativos às duas outras questões a que me propus responder com o meu estudo: “Que dificuldades revelam os alunos na construção e interpretação de gráficos de funções afins?”, e, “Que dificuldades evidenciam os alunos na representação algébrica de funções afins a partir da representação gráfica?”.

Construção e interpretação de gráficos de funções afins. Vou começar por expor os exemplos recolhidos, com o objetivo de responder à questão, “Que dificuldades revelam os alunos na construção e interpretação de gráficos de funções afins?”. Estas dificuldades surgiram logo nas primeiras aulas. A primeira dificuldade detetada surgiu durante o trabalho autónomo quando os alunos estavam a realizar a exploração acerca da noção do declive de uma reta. Aqui, os alunos tinham de consultar a tabela da calculadora gráfica para obterem as coordenadas dos pontos que usariam para desenhar as suas representações gráficas de funções lineares, como mostro no diapositivo seguinte.

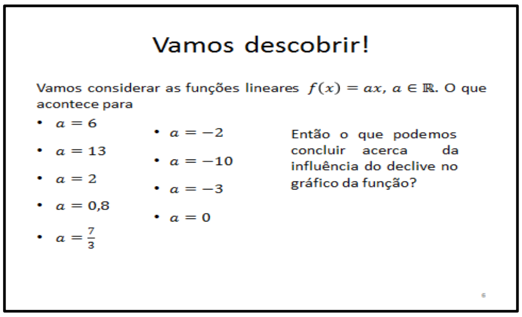


Figura 25 – Apoio da aula 2, diapositivo n.º6

Nesta exploração, a primeira dificuldade detetada foi na identificação dos eixos do referencial ortogonal e monométrico. Durante o trabalho autónomo questionei vários alunos sobre a identificação dos eixos do referencial, porque ou não os identificavam ou faziam-no incorretamente. O exemplo seguinte (figura 26) ilustra esta e outras dificuldades.

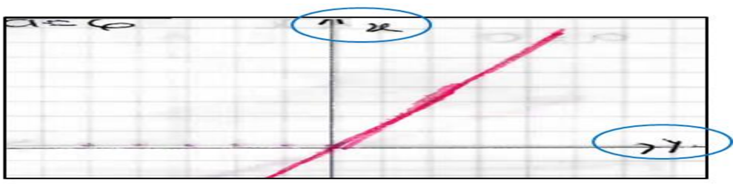


Figura 26 – Exploração da variação do declive de uma reta, resolução do Jorge

Uma dificuldade que podemos identificar na resolução do Jorge relaciona-se com a identificação dos eixos, uma vez que ele troca as suas designações. Apesar de este assunto ter sido abordado no ano letivo anterior e, ainda, na primeira aula que lecionei, os alunos mostram dificuldade em interiorizar a identificação dos eixos.

Para além disto, vê-se na resolução deste aluno que ele não utiliza qualquer escala nos eixos do referencial, nem qualquer ponto da função para realizar a construção da representação.

Durante o trabalho autónomo deparei-me com vários alunos que tinham dificuldade em marcar pontos no referencial ortogonal e monométrico. Grande parte deste alunos consegue identificar e marcar corretamente o valor da abcissa de um ponto, mas não consegue fazer o mesmo para o valor da ordenada desse mesmo ponto. O exemplo que se segue ilustra uma situação deste tipo que aconteceu com a Catarina. Acompanhei o trabalho da aluna e percebi que utiliza a quadrícula como unidade de escala do referencial, apesar de não o explicitar, nesta representação gráfica. Tendo em conta este facto, é visível que a Catarina tem dificuldades em marcar pontos no referencial, pois a função que pretendia representar é $f(x) = 6x$. Neste caso a imagem de 1 seria 6, mas, na representação gráfica da função que a aluna construiu, a imagem de 1 é 3.

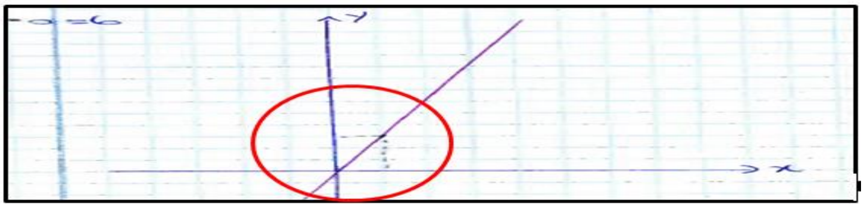


Figura 27 – Exploração da variação do declive de uma reta, resolução da Catarina

Na verdade, na construção de gráficos, de um modo geral os alunos da turma identificavam corretamente os eixos do referencial e os valores os correspondentes às abcissas e ordenadas, com a ajuda da tabela da calculadora gráfica, mas não os sabem assinalar no referencial. Podemos também ver este tipo de dificuldade no exemplo que apresento a seguir:

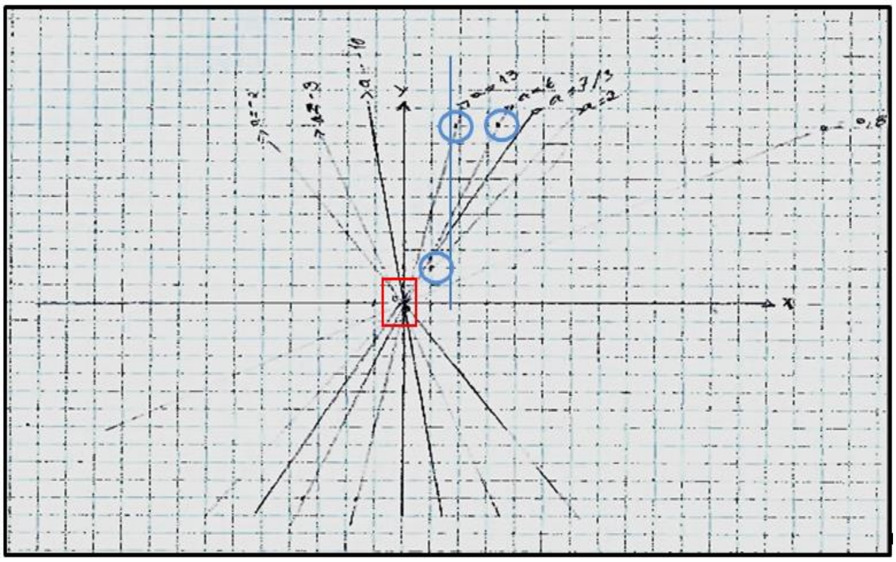


Figura 28 – Exploração da variação do declive de uma reta, resolução do Tiago

Na sua resolução (figura 28), o Tiago não atribui qualquer escala a ambos os eixos do referencial. Além deste facto, se observarmos com atenção, o aluno marca no referencial o ponto (0,0) (assinalado com o quadrado) e um segundo ponto para cada uma das retas assinaladas na figura com um círculo. Supondo que o aluno usou a quadrícula, como unidade do referencial, percebi que algo não estava correto, pois observei que a função linear $f(x) = 13x$ está muito afastada do eixo das ordenadas. Assim, ao observar outra função linear desenhada pelo aluno, como é o caso de $f(x) = 2x$, percebi que o aluno estava de facto a usar a quadrícula como unidade para a sua escala do seu referencial. Para desenhar a reta $y = 2x$, o aluno marca a origem do referencial e o ponto (1,2), o que está correto, mas o mesmo não se verifica para as restantes retas.

Estas dificuldades de cálculo e marcação de pontos estiveram presentes logo nas primeiras aulas, de que serve como exemplo a seguinte resolução do trabalho de casa que marquei depois dessas aulas, as observações pressentes na figura 30 são minhas.

6 Considera os pontos (0, 0) e (1, 3).

6.1. Assinala-os num referencial cartesiano.

6.2. Traça a reta que passa pelos dois pontos.

6.3. Indica a expressão algébrica de uma função que possa ser representada pela reta que traçaste na alínea anterior.

Figura 29 – Exercício do manual, página 116

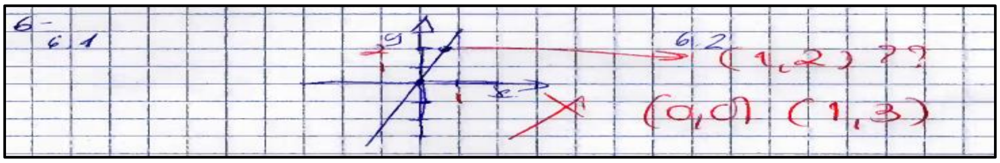


Figura 30 – Resolução do Ricardo, exercício do manual, página 116

Neste caso, o aluno não assinala o ponto (1,3) no referencial, o que faz com que o gráfico não corresponda à reta pretendida. De acordo com o que conheço do aluno, este deverá ter sido um erro de distração, o aluno terá lido que teria de marcar o ponto (1,2) e não (1,3) como está no enunciado. Mas, muitas vezes, há alunos que não respeitam a escala, usando a primeira quadrícula para o primeiro valor que necessitam para o primeiro ponto e a segunda quadrícula para um segundo valor que necessitem de marcar. É ainda de notar que o Ricardo, além de manifestar dificuldades em marcar pontos, não indica a escala que usa para fazer a construção desta representação gráfica.

Na tarefa 2, pude também observar estas dificuldades no exemplo da Francisca, na questão 3.1) que apresento na figura seguinte.

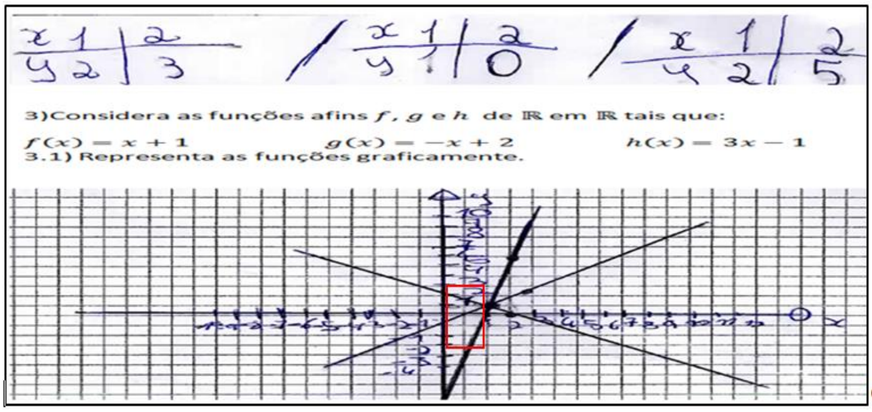


Figura 31 – Tarefa 2, questão 3, resolução da Francisca

É visível que, há um erro da aluna é na escala que usou no semieixo positivo das abcissas. Ao observarmos os pontos marcados pela aluna, percebemos que existem pontos mal assinalados, apesar de corretamente calculados nas tabelas (na parte superior da figura), como é o caso da função $f(x) = x + 1$.

Algumas das dificuldades que encontrei, tiveram de ser esclarecidas de imediato para que os alunos pudessem realizar a exploração. O caso mais frequente foi a questão de assinalar os pontos no referencial, como já mostrei acima, também aconteceu que quando o aluno já tinha conseguido assinalar dois pontos da representação gráfica da sua função por vezes não sabia o que fazer a seguir. Esta dificuldade não tinha sido prevista no meu plano de aula, ao contrário das anteriores, tendo optado por questionar os alunos do modo que a seguir exemplifico:

Francisca: Professora, não estamos a conseguir desenhar.
Professora: Vamos para valores de x positivos. E agora, a imagem de 0 é 0. Já temos um ponto. Outro ponto Francisca? Quando o x é 1, o y dá?
Francisca: Quando o x é 1, o y dá… 6.
Professora: Tens dois pontos… [a aluna não sabe o que fazer] Tens dois pontos, pegas na régua e unes, certo?
Francisca: Ah… Era só isso?
Professora: Sim.
[registo áudio da aula, 20 de Abril]

Outra dificuldade que surgiu nesta exploração foi no desenho da reta que para alguns alunos era complicado fazer corretamente, mesmo com a ajuda de uma régua e do papel quadriculado, como se pode ver no seguinte exemplo.

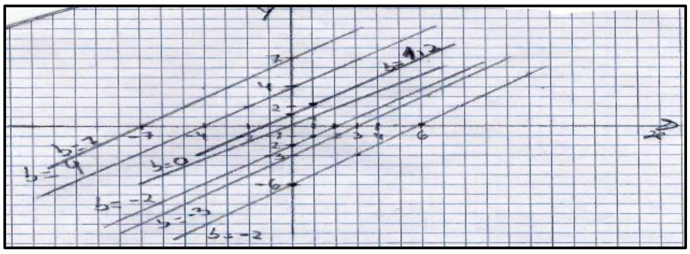


Figura 32 – Exploração da variação da ordenada na origem, Resolução do Daniel

Neste caso, todas as retas têm o mesmo declive variando apenas a ordenada na origem, o que faz com que todas as retas sejam paralelas, mas não é o que a resolução deste aluno mostra.

Num outro exemplo que se segue, o aluno, apesar de utilizar tabelas onde regista as coordenadas dos pontos que necessita para desenhar cada uma das representações gráficas pedidas, não o faz de forma correta. Quando observei os pontos determinados pelo aluno, em cada tabela, vi que está correta para as funções $f(x)$ e $h(x)$, mas as representações gráficas estão erradas. Na função $g(x)$ o aluno erra a determinação das coordenadas dos pontos do gráfico da função.

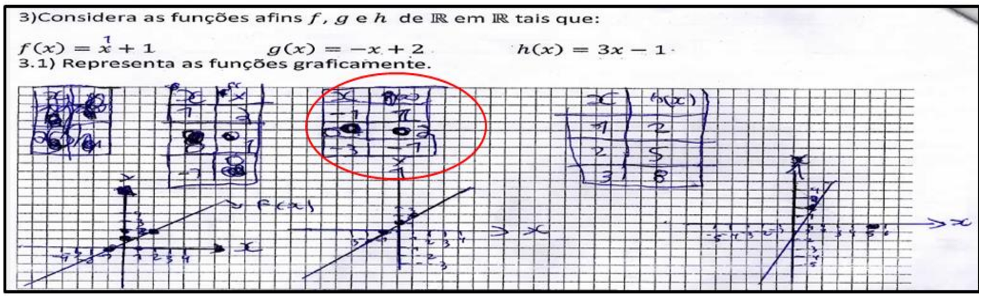


Figura 33 – Tarefa 2, questão 3, resolução do Bruno

Neste caso, através da observação da tabela (assinalada com um círculo), percebi que os seus erros se ficam a dever às suas dificuldades em realizar operações com números inteiros. Ao substituir o valor de x por -1, o aluno obtém que $g(-1) = 1$ o que é falso, pois o aluno não aplica a regra dos sinais na primeira parcela. A dificuldade na construção da representação gráfica está novamente relacionada com a marcação de pontos no referencial. Por fim este aluno, não identifica que a interseção entre o eixo das ordenadas e a reta é a ordenada na origem.

O aluno deveria identificar que, como o declive da reta que representa a função $g(x)$ é negativo, a reta deveria estar 'inclinada para a esquerda'. Observando o trabalho do aluno percebe-se que tem dificuldades em interpretar informação, de uma representação gráfica relativa ao declive de uma reta e a ordenada na origem.

Outra questão, que foi muito debatida nas aulas, prende-se com a noção de que a representação gráfica de uma função linear contém a origem do referencial. Os alunos têm ainda muita tendência a recorrer a esta noção, independentemente da função em questão, não tendo em conta os dados que lhes são fornecidos. Muitas vezes a informação estava no enunciado da questão, como foi o caso da tarefa 2, questão 3, e os alunos tiveram algumas dificuldades porque as funções que obtinham não passavam na origem do referencial. Apesar de os alunos construírem corretamente a representação gráfica das funções, chamavam-me para confirmação, dando a entender que porventura teriam dúvidas se o que tinham feito estava correto. Assim, na aula em que esta situação aconteceu, ao perceber que era uma dúvida geral, parei a aula e questionei os alunos.

Professora: O enunciado da tarefa diz assim: "Considera as funções afins". As funções afins têm de passar na origem do referencial?

Vários alunos: Não.

[registo áudio da aula, 22 de Abril]

Esta é uma situação recorrente, os alunos supõem que está errado o que fizeram de forma correta por não lerem todos os dados do enunciado. Esta dificuldade dos alunos tem raízes profundas pois, logo na primeira aula, percebi que a ideia de a representação gráfica das funções em estudo passar na origem do referencial para os alunos não estava associada à função linear, mas sim à noção de função. Nessa aula, quando estava a rever a noção de função, os alunos assumiam que qualquer representação gráfica de uma função tinha de passar pela origem do referencial. Esta questão surgiu quando analisávamos o seguinte exemplo.

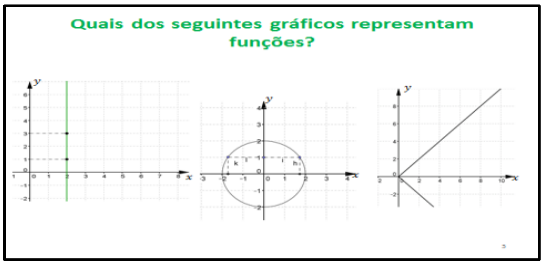


Figura 34 – Apoio da aula 1, diapositivo n.º5

Professora: Vamos analisar este exemplo (figura 34). Vamos começar por olhar para estes três gráficos e vocês vão dizer se aqueles gráficos representam funções. Vamos começar pelo primeiro. Representa uma função?

Maria: Não.

Professora: Porquê?

Maria: A linha traçada não passa pela origem.

Professora: É por causa disso?

Maria: Sim…

Professora: Então eu posso desenhar a representação gráfica de uma função no quadro, que vocês já conhecem e que não passa na origem do referencial. [desenhei a representação gráfica de uma função afim de declive positivo e ordenada na origem positiva].

Vários alunos: Pois é.

[registo áudio da aula, 13 de Abril]

Esta ideia incorreta, foi algo que os alunos levaram algum tempo a ultrapassar e muitas vezes era necessário questioná-los, para melhor esclarecimento. Mesmo insistindo, ainda encontrei em aulas posteriores situações em que esta ideia se voltou a manifestar, como mostro no exemplo a seguir figura 35.

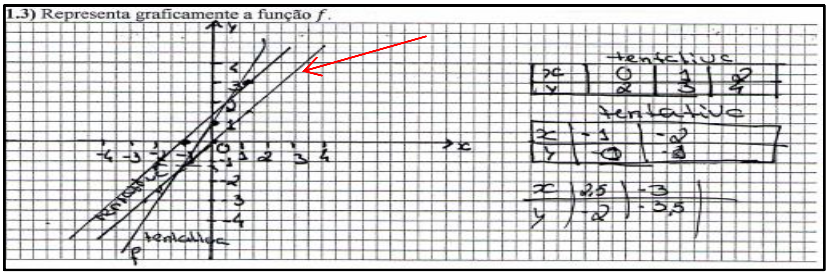


Figura 35 – Questão de aula n.º5, alínea 1.3, resolução da Alice

Para representar graficamente a função $f(x) = -2x - 1$, a aluna apresenta uma representação de uma função linear, além de que nenhum dos pontos que calcula está correto. A resolução da aluna sugere que não identifica que se trata de uma função afim e ainda que não compreende as consequências de o declive da reta ser negativo na construção da sua representação gráfica.

O próximo exemplo é a resposta da Francisca à questão 1.1) da Questão de aula nº 5, que decidi esclarecer, porque a aluna não apresentou uma justificação correta.

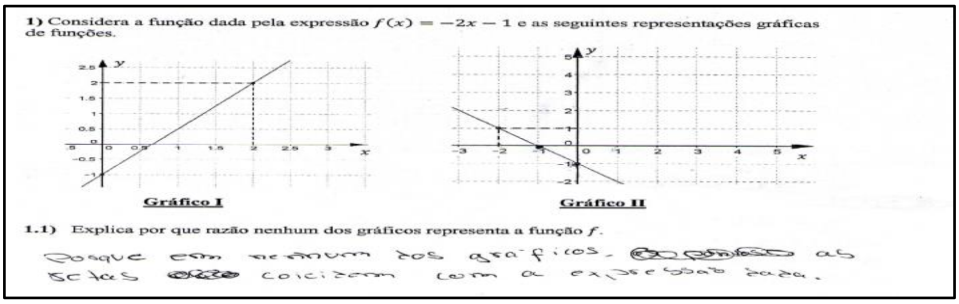


Figura 36 – Questão de aula n.º5, alínea 1.1, resolução da Francisca

Durante a entrevista à Francisca coloquei algumas que questões que me ajudaram a perceber algumas das dificuldades da aluna, que passo a mostrar.

Neste caso, a aluna sabe que o gráfico da função linear passa na origem, mas não está segura do que isto significa. A Francisca não atribui o mesmo significado a ”uma função que passa na origem do referencial” e “ uma função que passa no ponto $(0,0)$ ”. A Francisca é um caso em que é evidente a dificuldade em distinguir a representação gráfica de uma função linear e da representação gráfica de uma função afim.

Professora: Se desenhar uma reta que passe aqui no ponto $(0,0)$*?*
Francisca: É uma função Afim…. Linear…
Professora: Linear ou Afim?
Francisca: Linear.

Professora: Muito bem, então estas duas funções que aqui estão representadas [apontei para o gráfico I e para o gráfico II], são lineares ou afins?

Francisca: Lineares...

Professora: Então tu disseste que as lineares passam na origem, estas funções passam na origem?

Francisca: Não. São Afins.

(…)

[entrevista]

O aluno, a que me vou referir com o exemplo seguinte, mostra dificuldades de interpretação de gráficos de funções afins devido à escala usada no referencial.

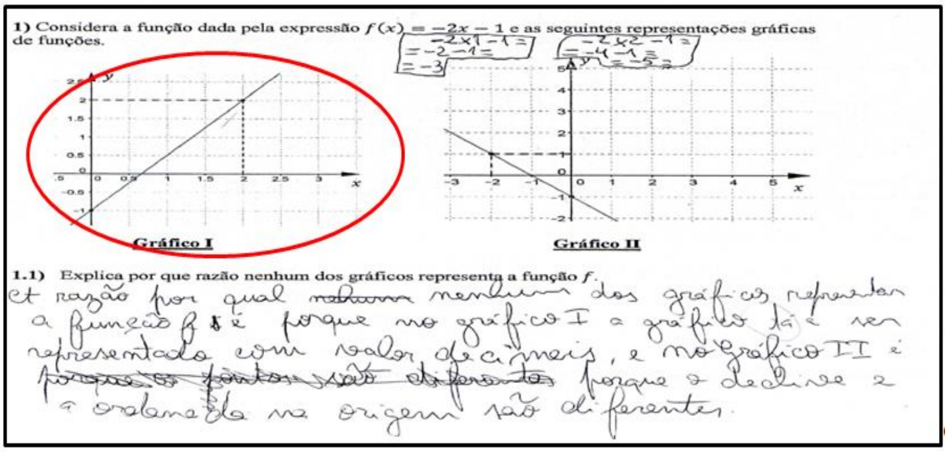


Figura 37 – Questão de aula n.º5, alínea 1.1, resolução do Pedro

Na Questão de aula n.º 5 o gráfico I tinha uma escala decimal (ver figura 37), para que os alunos pudessem visualizar melhor os pontos da reta o que, para o Pedro, fê-lo assumir que seria a justificação para não se tratar da representação gráfica da função, $f(x) = -2x - 1$. Esta situação evidencia que introduzir variações nas representações, se não for de modo sistemático, pode provocar dificuldades aos alunos. Apesar disto, conseguimos perceber pela sua resposta, na mesma pergunta relativamente ao gráfico II, que o aluno sabe que pode justificar a sua resposta recorrendo ao declive e à ordenada na origem. Contudo acaba por deixar a resposta incompleta.

Ao ler o que o aluno escreveu, elaborei para a entrevista a representação gráfica do gráfico I, com escala com unidades inteiras, como elaborei para o gráfico II na tentativa de compreender como interpretaria o aluno esta nova representação gráfica, que na verdade era a mesma (figura 38).

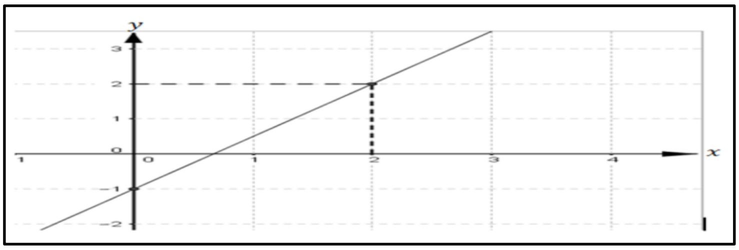


Figura 38 – Representação gráfica do gráfico I, da questão de aula n.º 5 com escala unitária

Na entrevista, comecei por pedir ao aluno que voltasse a ler a questão e a resposta que tinha dado na aula.

Professora: Consegues explicar como pensaste para escreveres a tua resposta?

Pedro: A resposta que eu dei foi que, nenhum dos gráficos representa a função f, porque no gráfico I o gráfico está a ser representado em valores decimais e o gráfico II é porque o declive e a ordenada na origem são diferentes.

Professora: Então vamos pensar no gráfico I. Eu tenho aqui, a representação gráfica do gráfico I que está numa escala unitária. E este achas que representa a função f?

Pedro: Eu acho que sim.

Professora: No início é dito que nenhum dos gráficos representa a função f. Então tem de haver uma justificação para não representarem a função f.

Pedro: Ah, já sei… Isto é uma função afim [aluno aponta para a expressão algébrica da função f, logo não passa na origem…

Professora: E o gráfico I ou o gráfico II passam na origem do referencial?

Pedro: Não.

Professora: Então, que tipo de funções são as que estão representadas no gráfico I e II?

Pedro: Afins.

Professora: Se tens três funções afins, como vais fazer para as distinguir? [aluno não consegue responder]

(…)

Professora: Então vamos pensar no gráfico I e no gráfico II, como podes distingui-los?

Pedro: Um é positivo e o outro é negativo.

Professora: O que é que é positivo? O que é que é negativo?

Pedro: O gráfico I é positivo e o gráfico II é negativo.

Professora: O que estás a apontar tem nome.

Pedro: Reta. Os quadrantes… se está nos quadrantes positivos é positiva [aluno aponta para os quadrantes impares], se está nestes quadrantes [aluno aponta para os quadrantes pares] é negativa.

Professora: O que é que é positivo? O que tu dizes na segunda parte da tua resposta é interessante. Dizes que o declive e a ordenada na origem são diferentes. Vamos pensar no gráfico II. Porque é que o declive e a ordenada na origem são diferentes?

Pedro: O declive é o x.

Professora: Que x?

Pedro: Não sei.

Professora: Então já me disseste que estamos a falar de funções afins e que elas são do tipo $ax + b$. O que representa o a?

Pedro: O a é o declive e o b é a ordenada na origem. Então aqui [aluno aponta para o gráfico II, o a é -2 e o b é -1. [aluno aponta corretamente a ordenada na origem e aponta para o ponto (-2,1), atribuindo o valor da abcissa ao declive.]

Professora: Então e no gráfico I?

Pedro: Aqui é 2.[O aluno aponta para o ponto (2,2)]

Professora: O que é que é 2?

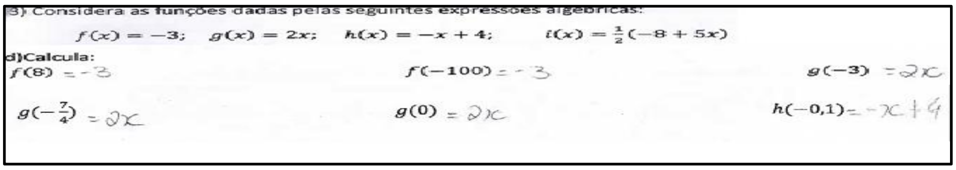
Pedro: O declive.

[entrevista]

O Pedro sugere que o declive de uma função afim é o valor da abcissa de um ponto que pertença à função. Esta associação pode estar relacionada com o facto de que para a ordenada na origem só precisa de visualizar a interseção o eixo das ordenadas e a representação gráfica da função.

Representação algébrica de gráficos de funções afins. Passo agora a mostrar exemplos relativos à última questão que coloquei, "Que dificuldades evidenciam os alunos na representação algébrica de funções afins a partir da representação gráfica?".

A primeira dificuldade dos alunos com que me deparei, é a substituição da variável independente por um valor. Um exemplo deste tipo de dificuldade pode ser observado na resolução da tarefa 1, na questão 3, alínea d) (figura 39).


3) Considera as funções dadas pelas seguintes expressões algébricas:

$f(x) = -3$; $g(x) = 2x$; $h(x) = -x + 4$; $i(x) = \frac{1}{2}(-8 + 5x)$

d) Calcula:

$f(8) = -3$ $f(-100) = -3$ $g(-3) = 2x$

$g(-\frac{7}{4}) = 2x$ $g(0) = 2x$ $h(-0{,}1) = -x + 4$

Figura 39 – Tarefa 1, questão 3, alínea d, resolução da Alice

Observando a resolução da aluna, percebi que não compreende como deve proceder para determinar a imagem de cada um dos objetos. No caso da função f, a aluna atribui a imagem correta a qualquer um dos objetos, mas ao observar a resolução relativa às funções g e i, percebi se limita a copiar cada uma das expressões algébricas. Esta dificuldade manifestou-se de diversas forma, neste caso, a aluna não compreende que estamos a substituir a variável x por um determinado valor. Esta questão foi discutida com os alunos e realizei no quadro o seu registo para me assegurar que ficava esclarecida. Durante esta discussão, enquanto tentava que os alunos compreendessem, como devem fazer a substituição da variável independente

x, por um objeto na expressão algébrica da função, percebi que os alunos têm dificuldades em realizar a operações com inteiros.

Professora: Quanto é $h(-0{,}1)$? Em primeiro lugar, a função h é uma função….
Turma: Afim.
Professora: Então com é que fica no caso da função h?
Ricardo: Fica 4,1.
Maria: Fica $-0{,}1 + 4$.
Professora: Como é que faço a substituição?
Joana: $-0{,}1 + 4$. Então, vai substituir o x.
Professora: Substituo o x, mas há ali uma coisinha antes do x…
Turma: O menos.
Professora: O menos. Mantenho o menos?
Turma: Sim.
[professora escreve no quadro]
$h(-0{,}1) = -(-0{,}1) + 4$
Joana: Mais!
Professora: Menos por menos?
Turma: Mais!
$h(-0{,}1) = -(-0{,}1) + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h(-0{,}1) = 0{,}1 + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow h(-0{,}1) = 4{,}1$

[registo áudio da aula, 15 de Abril]

Esta questão da substituição da variável independente não ficou solucionada após esta discussão e voltou ainda a surgir em outros exemplos, como o que passo a mostrar.

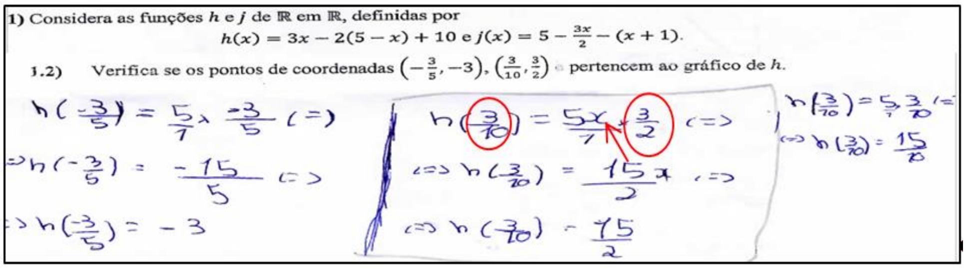
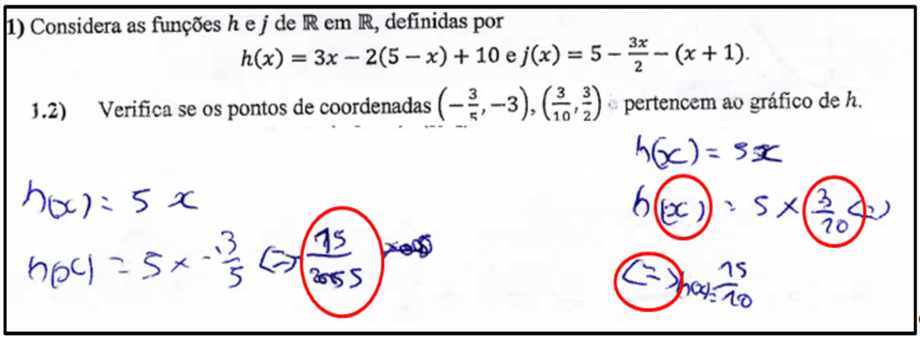


Figura 40 – Tarefa 3, questão 1, alínea 1.2, resolução da Francisca

A Francisca, não só mostra dificuldades em substituir a variável independente, mas também em compreender que a imagem é o resulta do da substituição da variável independente por um dado objeto. A aluna não substitui corretamente a variável x na expressão algébrica, pois a variável x continua a aparecer no segundo membro da equação. Durante o trabalho autónomo percebi que a Francisca sabia que no segundo membro, teria de ter o valor da imagem, para que o ponto pertença à função, mas a aluna não identifica que este valor surge como resultado da substituição do objeto na função h, como vemos na figura 40. Outro exemplo relacionado com a dificuldade em substituir a variável independente, encontra-se na figura 41.


1) Considera as funções h e j de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por

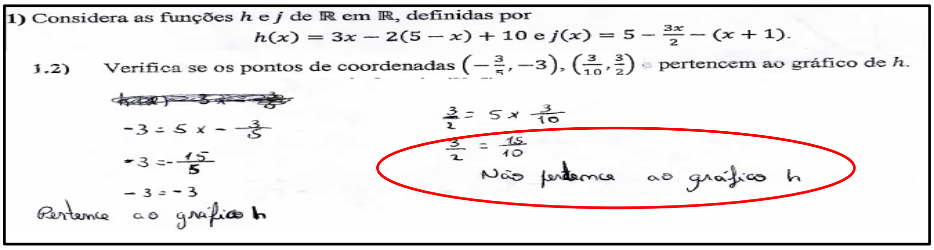
$$h(x) = 3x - 2(5 - x) + 10 \text{ e } j(x) = 5 - \frac{3x}{2} - (x + 1).$$

1.2) Verifica se os pontos de coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -3\right)$, $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{2}\right)$ e pertencem ao gráfico de h.

Figura 41 – Tarefa 3, questão 1, alínea 1.2, resolução do Bruno

O Bruno substitui variável independente, mas apenas no segundo membro da equação. Em alguns casos, os alunos não sentem necessidade de manter a escrita correta da equação, chegam mesmo a esquecer por completo o primeiro membro, como podemos observar na verificação do primeiro ponto. Outra dificuldade relaciona-se com a escrita de equivalentes entre as equações, que é feita de modo incorreto ou esquecida pelo aluno. Podemos, ainda, ver que o aluno não apresenta qualquer conclusão. Como acompanhei o trabalho do Bruno percebi que não sabia calcular a fração irredutível. Quando questionei o aluno disse que não poderia fazer mais nada, a partir deste ponto e que não sabia se -3 era igual a $-\frac{15}{5}$. Aqui continuei a colocar questões no sentido de o ajudar. Perguntei-lhe o que é uma fração, mas o aluno não dava qualquer resposta. Esta foi uma noção em que insisti muito com os alunos, nas minhas aulas. A questão de, não atribuir à fração o significado de uma divisão entre dois números, acaba por muitas vezes os bloquear. Neste caso, apesar das dificuldades na comunicação matemática escrita, o aluno chega à solução pretendida, mas não responde à questão, pois não compreende o que é uma fração, nem sabe calcular a fração irredutível, logo não retira a conclusão pretendida.

Esta questão da determinação da fração irredutível foi uma dificuldade manifestada, não só por este aluno, mas por outro, como passo a mostrar na figura 42.


1) Considera as funções h e j de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por
$h(x) = 3x - 2(5 - x) + 10$ e $j(x) = 5 - \frac{3x}{2} - (x + 1)$.

1.2) Verifica se os pontos de coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -3\right)$, $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{2}\right)$ e pertencem ao gráfico de h.

$-3 = 5 \times -\frac{3}{5}$

$-3 = -\frac{15}{5}$

$-3 = -3$

Pertence ao gráfico h

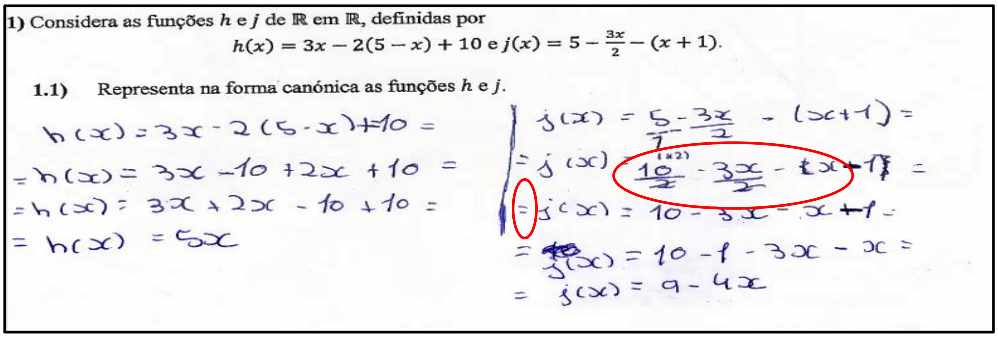
$\frac{3}{2} = 5 \times \frac{3}{10}$

$\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$

Não pertence ao gráfico h

Figura 42 – Tarefa 3, questão 1, alínea 1.2, resolução do Daniel

Este aluno não identifica que a fração que se encontra no segundo membro não se encontra na sua forma irredutível, portanto para o aluno $\frac{3}{2}$ não é igual a $\frac{15}{10}$. As dificuldades ao nível de operações com frações surgem em vários exemplos. É o caso da resolução da Francisca ilustrada na figura 43, que passo a analisar.


1) Considera as funções h e j de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por
$h(x) = 3x - 2(5 - x) + 10$ e $j(x) = 5 - \frac{3x}{2} - (x + 1)$.

1.1) Representa na forma canónica as funções h e j.

$h(x) = 3x - 2(5 - x) + 10 =$

$= h(x) = 3x - 10 + 2x + 10 =$

$= h(x) = 3x + 2x - 10 + 10 =$

$= h(x) = 5x$

$j(x) = \frac{5}{1} - \frac{3x}{2} - (x+1) =$

$= j(x) = \frac{10}{2} - \frac{3x}{2} - (x+1) =$ (×2)

$= j(x) = 10 - 3x - x + 1 =$

$= j(x) = 10 - 1 - 3x - x =$

$= j(x) = 9 - 4x$

Figura 43 – Tarefa 3, questão 1, alínea 1.1, resolução da Francisca

A questão tinha como objetivo, que os alunos fossem capazes de escrever a expressão algébrica da função na forma canónica. Quando analisei esta resolução, percebi que as dificuldades da Francisca, em chegar à forma canónica, não se relacionam com a forma como a expressão deve ser escrita, mas sim com as suas dificuldades relativas a operar com polinómios com frações. A aluna apresenta na sua resolução várias incorreções, pois além de reduzir ao mesmo denominador dois monómios desnecessariamente, ainda "corta" os denominadores e desaparece com estes. Este facto mostra que, a aluna não compreendeu em que condições, pode desembaraçar de denominadores e o porquê de o poder fazer, apesar de este assunto já ter sido abordado nas aulas de equações do 2.° grau, lecionadas no 2.° período. É ainda de salientar que o uso de igualdades, em vez de equivalentes também é um erro comum e que muitas vezes foi corrigido no decorrer das aulas. No que respeita à representação de expressões algébricas na forma canónica, é ainda evidente que caso os alunos se deparem com cálculos que envolvam a propriedade distributiva, esta constitui um obstáculo, como é o caso do exemplo que se segue.

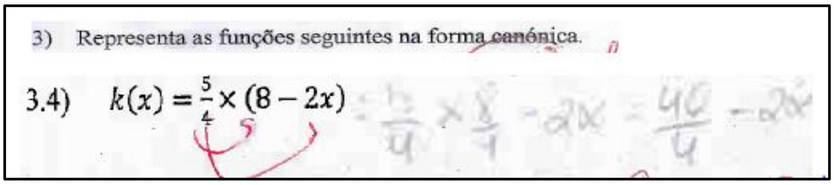


Figura 44 – TPC aula1, questão 3, alínea 3.4, resolução do Miguel

A resolução do aluno mostra dificuldades na aplicação da propriedade distributiva. O Miguel não chega à resposta correta porque apenas multiplica $\frac{5}{4} \times \frac{8}{1}$, esquecendo que devia também, fazer a multiplicação pelo monómio de grau 1. Este tipo de erro é comum, por este facto, tive o cuidado de o corrigir em cada um dos trabalhados de casa em que o encontrei. Contudo, ainda discuti a resolução desta questão, no início da aula em que entreguei as resoluções corrigidas.

Todas estas dificuldades se prendem com a manipulação e simplificação de expressões algébricas. Mas mesmo tendo a expressão algébrica à partida existe outro tipo de dificuldades que os alunos evidenciam, como em casos onde lhes é pedido que identifiquem o declive e a ordenada na origem.

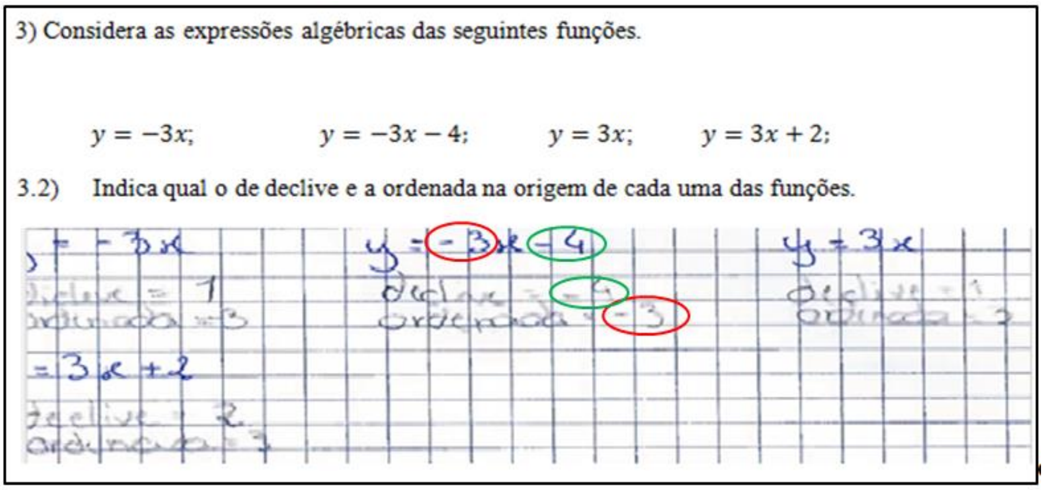


Figura 45 – TPC aula3, questão 3, alínea 3.2, resolução da Maria

Este trabalho de casa teve especial atenção, porque era uma confusão importante de desfazer nos alunos, pois tal como a Maria, existiram outros alunos que trocaram o declive e a ordenada na origem. Esta dificuldade na identificação dos parâmetros foi imediatamente resolvida no início da aula, realizando uma discussão deste trabalho de casa em conjunto com os alunos de modo a que fosse ultrapassada. Aproveitei ainda para chamar à atenção da turma que deveriam escrever ordenada na origem, porque apenas ordenada não tem o mesmo significado.

Ao contrário da dificuldade de identificação dos parâmetros, dada uma expressão algébrica, a seguinte era esperada e foi comum a muitos dos alunos. Na mesma tarefa (ver Anexo XIII) que enviei para trabalho de casa, era pedido que escrevessem a equação de algumas retas, mas surpreendentemente, alguns alunos após já terem construído equações de retas desde a primeira aula, deram uma resposta semelhante à da Joana:

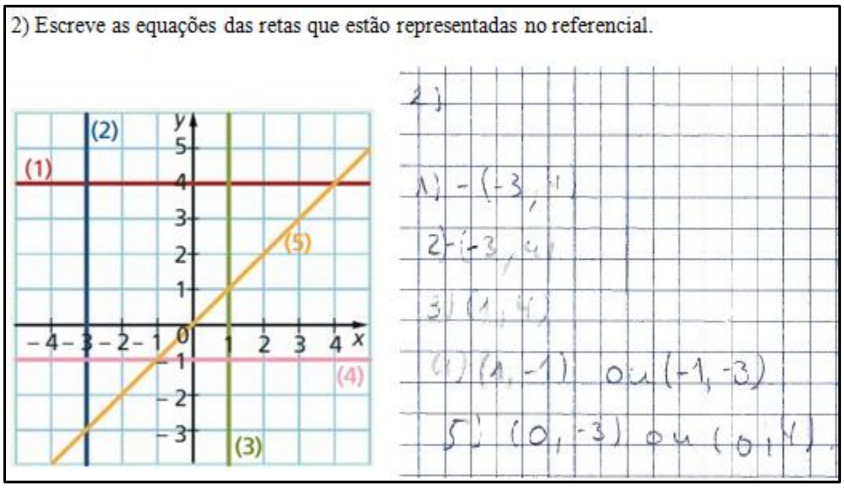


Figura 46 – TPC aula3, questão 2, resolução da Joana

Ao analisar o trabalho de todos os alunos percebi que não compreenderam com se escrevem equações de retas. Os restantes alunos da turma escreveram tal como a Joana, apenas, os pontos de interseção entre cada uma das retas, não identificando que, cada uma das retas corresponde a um tipo de função que já haviam estudado. Esta dificuldade verificou-se com vários alunos, por isso esta questão foi alvo de uma discussão no início da aula. Este trabalho de casa mostrou-me que, os alunos tinham ainda algumas dificuldades em identificar cada uma das expressões algébricas, de cada função que já conheciam.

Uma outra dificuldade que encontrei relaciona-se com a construção de equações de retas. Os alunos procediam corretamente determinando o declive da reta de acordo com os dados, mas ao escrever a equação da reta esqueciam-se de escrever a variável *x* (ver figura 47).

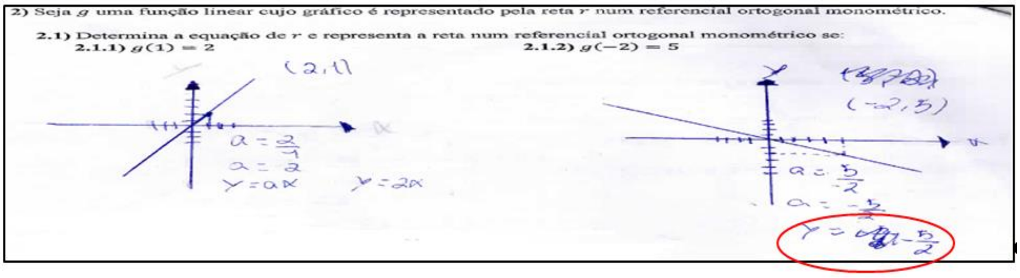


Figura 47 – Tarefa 3, questão 2, alínea 2.1.2, resolução do Miguel

Durante o trabalho autónomo foram vários os alunos, aos quais coloquei algumas questões acerca de “de que tipo é a equação de uma reta, que representa uma função linear?”, pois os alunos estavam preocupados em determinar o declive da reta, mas depois escreviam a equação de uma reta constante. O Miguel foi um dos que questionei e como é visível na primeira alínea, o aluno corrigiu. Contudo na segunda alínea, escreve a equação de uma função constante. Vários alunos fizeram este erro, nas resoluções, mas com alguma insistência diária da minha parte acabaram por compreender que não era apenas importante determinar o declive. Tanto a resolução do trabalho de casa da figura 46 como a resolução da questão 2, da tarefa 3 (figura 47) mostram que, os alunos têm dificuldade em distinguir os três tipos de funções que conhecem através da expressão algébrica.

Na tarefa 3 encontra-se um problema em que os alunos têm de interpretar a informação dada, para responderem às questões colocadas. O próximo exemplo da figura 48, sugere algumas dificuldades da aluna ao nível da interpretação do enunciado e de como deve usar a informação dada.

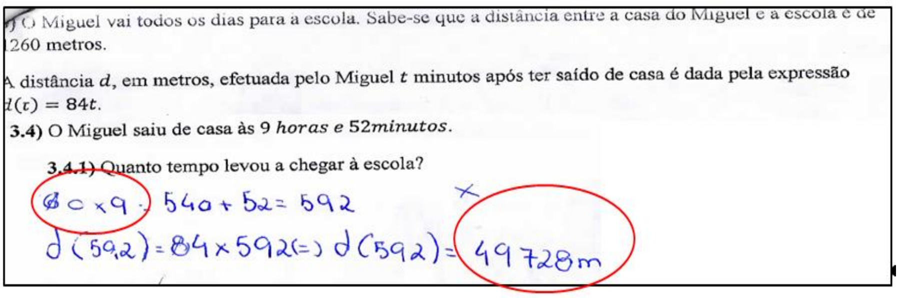


Figura 48 – Tarefa 3, questão 3, alínea 3.4.1, resolução da Maria

A Maria não identifica que a informação de que precisava estava no início da questão, o que fez com que não fosse capaz de interpretar o resultado obtido. O resultado obtido pela aluna, mostra a distância percorrida pelo Miguel em 9 horas e

52 minutos. Durante a resolução a aluna não se apercebeu deste erro, e quando vi o que a Maria tinha feito, optei por colocar algumas questões.

Professora: Obtiveste 49728 quê?
Maria: Minutos…
Professora: Mas a função d devolve resultados em…??
Maria: Metros…
Professora: Podes voltar a ler o enunciado da questão 3? [a aluna voltou a ler o enunciado da questão 3.] Então o que queres descobrir?
Maria: O tempo que ele levou a chegar à escola.
Professora: E que dado é que tens, que te pode ajudar?
Maria: A distância.
Professora: Que distância?
Maria: Entre a casa do Miguel e a escola.
Professora: Então?
Maria: Mas não dá, eu não tenho o t.
Professora: Pois não. O que é que tens?
Maria: Tenho a distância.
Professora: Então?
Maria: Mas se eu não tenho o t, não posso substituir…
Professora: Os resultados da tua função são devolvidos em que unidade?
Maria: Em metros.
Professora: Então se tens a distância, está em metros?
Maria: Sim.

[registo de aula, 29 de Abril]

Lembro-me que, a aluna além de não ter compreendido que o dado de que necessitava era a distância entre a casa do Miguel e a escola, também teve dificuldade em compreender que deveria substituir a distância e não o tempo. A aluna não achava possível substituir a variável dependente na função dada. Para a Maria apenas podíamos substituir a variável independente. Quando consegui que a Maria escrevesse a equação, a aluna ainda resistiu, questionando o que devia fazer a seguir. Perguntei-lhe se $1260 = 84t$ era uma equação, ao que me respondeu que sim e começou de imediato a resolver.

As próximas dificuldades relacionam-se com determinação dos parâmetros, declive e ordenada na origem. Relativamente à determinação do declive é necessário ter atenção a ordem pela qual consideramos os pontos, como mostro no seguinte exemplo da figura 49.

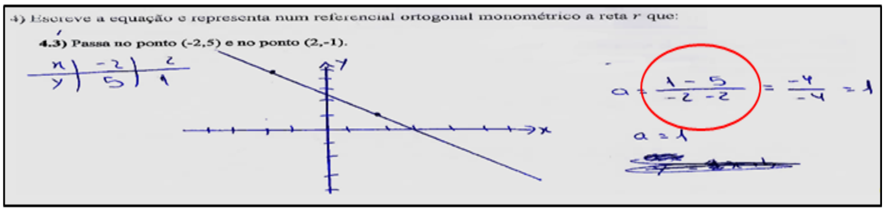


Figura 49 – Tarefa 3, questão 4, alínea 4.3, resolução da Catarina

Ao resolver a questão a Catarina escreve incorretamente as coordenadas do ponto $(2, -1)$, pois esquece o sinal negativo da ordenada e a resolução sugere que terá trocado a ordem das abcissas no denominador. Além desta existem outras incorreções na resolução, mas que não se enquadram nesta parte do trabalho. Um outro exemplo, mais claro, é o do Miguel. O aluno faz o quociente da diferença, entre as abcissas e ordenadas de cada ponto que tem (figura 50).

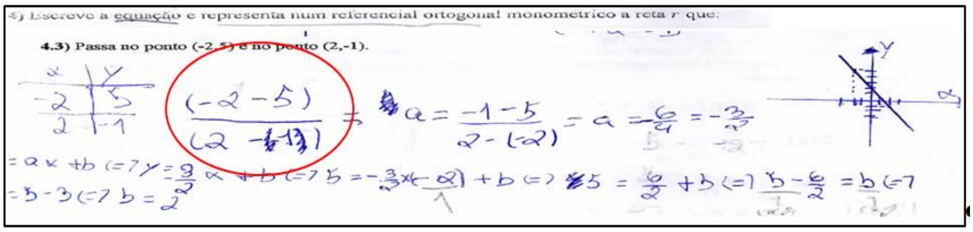


Figura 50 – Tarefa 3, questão 4, alínea 4.3, resolução do Miguel

Apesar deste erro, o aluno apercebe-se e corrige o que fez à frente. Durante o trabalho autónomo questionei o Miguel acerca do que havia escrito e o aluno acabou por calcular depois o declive e a ordenada na origem corretamente.

A resolução da Joana mostra também dificuldades na determinação do declive, pois escreve a fórmula para determinar o declive errada, como mostra a sua resolução na figura 51.

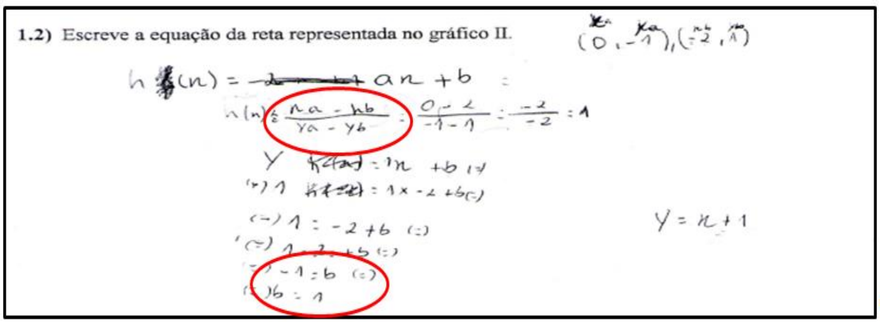
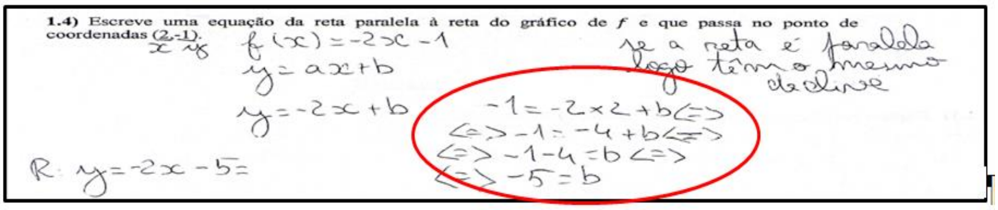


Figura 51 – Questão de aula n.º5, alínea 1.2, resolução da Joana

Esta é uma dificuldade muito comum, pois quando acompanhei o trabalho dos alunos, muitas vezes não se lembravam da fórmula para determinar o declive de uma reta, outros não a sabiam e outros ainda erravam por distração, acabando por trocar as coordenadas dos pontos. Outra incorreção na resolução da Joana acontece quando, a aluna resolve trocar o *b* para o primeiro membro da equação e passa o valor de *b* para o simétrico. A aluna mostra ainda dificuldades na resolução de equações de 1.º grau.

Por fim, este exemplo mostra que a resolução de equações está no centro do problema da determinação da ordenada na origem, como ilustra a resolução do Pedro.


1.4) Escreve uma equação da reta paralela à reta do gráfico de f e que passa no ponto de coordenadas (2,-1).

x y

$f(x) = -2x - 1$

$y = ax + b$

$y = -2x + b$

se a reta é paralela logo têm o mesmo declive

$-1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 = -4 + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 - 4 = b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5 = b$

R: $y = -2x - 5 =$

Figura 52 – Questão de aula n.º5, alínea 1.2, resolução do Pedro

É de destacar que o aluno não tem qualquer dúvida acerca do declive da reta paralela ao gráfico de *f*, mas acaba por mostrar dificuldades na determinação da ordenada na origem. O Pedro mostrou dificuldades durante as aulas, relativamente à construção de expressões algébricas e equações de uma reta, porque não tem presentes algumas das regras, relativas a resolução de equações.

Apesar destas dificuldades os alunos tentaram sempre responder às questões colocadas de modo coerente, com o que aprenderam nas aulas. Estes alunos eram interessados e empenhados na sua aprendizagem, mas percebe-se que algumas das suas dificuldades relacionam-se com dificuldades em outros domínios, o que os prejudica na sua aprendizagem acerca de gráficos de funções afins.

Conclusões

Mesmo tendo sido introduzido o domínio das funções no ano letivo anterior e, apesar de grande parte das noções já terem sido trabalhadas, eram esperadas dificuldades. De acordo com estudos realizados no âmbito da Álgebra, onde até ao ano de 2013 o programa incluía as Funções e Gráficos, sabe-se que este domínio traz dificuldades aos alunos devido ao seu grau de abstração, à sua terminologia própria, à relação intrínseca que tem com as Equações e à confusão entre as diferentes representações gráficas de funções. Para perceber de modo mais profundo estas dificuldades, estabeleci como objetivo do trabalho que realizei "Compreender as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins no 8.ºano", e formulei as seguintes questões: "Que estratégias os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins?", "Que dificuldades revelam os alunos na construção e interpretação de gráficos de funções afins?" e "Que dificuldades evidenciam os alunos na representação algébrica de funções afins a partir da representação gráfica?". Depois do longo caminho percorrido, estou agora em condições de dar algumas respostas a essas questões. Para isso, além da revisão de literatura e das discussões e reflexões com os orientadores, analisei as produções escritas, as interações em sala de aula gravadas em áudio e as entrevistas realizadas a alunos do 8.° ano da turma A, da Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.

Que estratégias os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins?

De acordo com Ponte (2005), os alunos devem ter contato com as diferentes formas de representar uma função: numérica, gráfica e algébrica. Esta foi então uma indicação que tive em conta para a minha intervenção letiva. Apesar de os alunos já terem trabalhado com funções no ano letivo anterior, este ano acabou por ser feita uma grande revisão deste conceito, voltando a abordar a noção de função e cada um dos tipos de representação de uma função. De acordo com os dados recolhidos e analisados, identifiquei que os alunos utilizam dois tipos de estratégias para resolverem tarefas sobre gráficos de funções afins: estratégias gráficas e estratégias algébricas.

Para responder a esta questão tive o cuidado de elaborar questões, nas três tarefas construídas, que, simultaneamente, permitissem aos alunos realizar uma aprendizagem consistente e, ainda, que essas questões possibilitassem a escolha da estratégia a utilizar. Na resolução destas tarefas os materiais usados pelos alunos foram o papel quadriculado, a régua e a calculadora gráfica. Nos materiais que construí utilizei ainda o programa Geogebra para elaborar todas as representações gráficas.

De acordo com os dados recolhidos, alguns alunos têm tendência para conceber e usar estratégias gráficas. Muitas das questões propostas poderiam ter sido abordadas através de outras estratégias, mas esta foi a escolha dos alunos. Para colocar em prática este tipo de estratégia, os alunos realizavam o que designei de abordagem gráfica. Na estratégia gráfica era necessário efetuar a marcação de pontos no referencial ortogonal e monométrico, o desenho de representações gráficas de funções constantes, lineares e afins e, a partir da análise de representações gráficas, retirar conclusões.

Os alunos compreenderam que para esboçar a representação gráfica de uma função afim necessitam de identificar dois pontos, em seguida representá-los num referencial e, finalmente, traçar uma linha que passe pelos dois pontos assinalados. Esta conclusão vai de encontro ao que Leinhardt et al (1990) nos dizem.

A abordagem de uma questão através de estratégias gráficas permite aos alunos criar conexões importantes entre formas análogas de resolver diferentes questões. Numa discussão em sala de aula percebemos que o Ricardo compreendeu que a ordenada na origem é a interseção da representação gráfica da função afim com o eixo das ordenadas. O aluno diz-nos que como a interseção de uma função linear com o eixo das ordenadas é a origem do referencial, no caso de uma função afim a ordenada na origem passa a ter o valor da ordenada do ponto de interseção do eixo das ordenadas com a função afim. Este raciocínio do Ricardo mostra-nos que as representações gráficas promovem o desenvolvimento da intuição matemática, tal como Ponte (1990) refere.

Outro exemplo de aplicação de uma estratégia gráfica bem-sucedida é o caso da Maria, na resolução, da Questão de aula n.°5 na pergunta 1, alínea 1.1), em que a aluna, através da análise das representações gráficas apresentadas nos gráficos I e II, consegue evidenciar que nenhum deles é a representação gráfica da função *f* dada no enunciado. Para tal, a aluna calcula um ponto que pertence à função *f* e observa que esse ponto não pertence a nenhumas das representações gráficas que lhe são dadas, logo nenhuma das retas representadas é a representação gráfica da função *f*. A Maria foi um pouco mais longe na sua análise, pois, tendo reconhecido que a ordenada na origem era comum aos dois gráficos dados e à função *f*, e como o ponto da função *f*, que a aluna determinou, não pertencia nem ao gráfico I, nem ao gráfico II, concluiu que as retas do gráfico I e do gráfico II não têm o mesmo declive que a representação gráfica da função *f*. Os alunos utilizaram ainda este tipo de estratégias para retirar conclusões acerca do declive e da ordenada na origem das retas em estudo. Foi possível com estas estratégias que os alunos concluíssem que retas paralelas têm o mesmo declive e que se duas retas têm o mesmo declive são paralelas.

Os exemplos acima mostram-nos o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos. Através da estratégia gráfica a Maria e outros alunos, durante a realização da exploração acerca da variação da ordenada na origem, foram mais longe do que era esperado. Tal como referem Ponte, Matos e Branco, (2009), os alunos foram capazes de traduzir a informação representada, raciocinar de acordo com essas informações e compreender que era possível generalizar a situação.

O recurso a estratégias gráficas observa-se com maior tendência em enunciados onde são dados pontos da função ou onde é dada a representação gráfica da função. A outra estratégia que, segundo os dados recolhidos, os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvem gráficos de funções afins é a algébrica. Os alunos recorrem a este tipo de estratégia quando têm a expressão algébrica da função no enunciado da tarefa e quando precisam de construir a equação de uma reta.

Alguns alunos recorrem à expressão algébrica da função, seja constante, linear ou afim, para justificar de que tipo é uma dada função. A identificação do tipo de expressão algébrica de cada uma das funções mostrou ser importante para alguns alunos. Um exemplo de uso de uma estratégia algébrica pode ver-se na questão 5 da tarefa 3, em que todos os alunos que a responderam recorreram a esta estratégia. Nesta questão todos alunos determinaram a equação de cada uma das retas representadas, através de processos algébricos, incluindo o cálculo da ordenada na origem que podia ser determinada por observação gráfica. Os alunos também mobilizaram os seus conhecimentos acerca de resolução de equações do 1.º grau para responder.

Um outro exemplo é o da Catarina, entrevistada acerca da sua resolução da Questão de aula n.°5, que nos afirma que prefere os processos algébricos porque desse modo tem a certeza do que faz. A Catarina concluiu que os gráficos I e II não poderiam representar a função *f* dada no enunciado, através da determinação do declive das retas representadas nesses gráficos. Contudo, esta mesma questão foi abordada de modo diferente por outros alunos que recorreram ao conhecimento que tinham do efeito da variação do declive de uma reta na respetiva representação gráfica. Deste modo, os alunos tiveram a oportunidade de avaliar as vantagens e desvantagens de cada estratégia que podiam mobilizar para as questões e optar por uma, neste caso a estratégia algébrica, atingindo um conhecimento mais consistente tal como nos recomenda o NCTM em Loureiro (2013).

A estratégia algébrica foi ainda utilizada pelos alunos em problemas com contexto para responder a questões e interpretar resultados obtidos.

Que dificuldades revelam os alunos na construção e interpretação de gráficos de funções afins?

A primeira dificuldade encontrada, no que diz respeito à construção e interpretação de gráficos, é na identificação dos eixos do referencial cartesiano. Os alunos, tal como nos refere Ponte (1984), têm dificuldade em fixar que ~~n~~o eixo das abcissas é identificado pela letra *x* e o eixo das ordenadas pela letra *y*. Existe uma grande tendência para os alunos fazerem uma identificação errada dos eixos, trocando uma pela outra, ou não os identificarem. Ainda em relação aos eixos, os alunos têm dificuldade em escolher a unidade da escala e em assinalá-la no referencial, tal como nos diz Ponte (1984), o que aconteceu com alguma frequência no caso dos dados analisados. Também percebi pelas primeiras construções de representações gráficas de funções que alguns alunos têm muitas dificuldades em marcar pontos no referencial, não tanto no que diz respeito à abcissa, mas sim relativamente ao valor da ordenada.

A dificuldade de marcação de pontos no referencial, identificada também por Ponte e Domingos (1994), está diretamente ligada com a dificuldade em compreender que têm de se deslocar segundo o eixo dos *xx* para marcarem o valor das abcissas (*x*) dos pontos e segundo o eixo dos *yy* para marcar o valor das ordenadas (*y*). Para os alunos o primeiro movimento é mais natural, mas a questão de ‘subir’ ou ‘descer’ no eixo das ordenadas, de acordo com o valor de *y*, é problemática. Outras vezes, os alunos não conseguem construir a representação gráfica porque, ao realizarem a determinação de pontos da função, quando têm a expressão algébrica, cometem erros de cálculo. Os erros de cálculo que mais se manifestaram mostram dificuldades em operar com inteiros, como por exemplo aplicação da regra dos sinais na adição e multiplicação ou a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, o que faz com que os pontos não sejam corretamente marcados e a representação gráfica esteja errada. Este é um exemplo que reforça as ideias de Duval, em que, a manipulação da expressão algébrica, para que possa ocorrer a transição para outro tipo de representação, representa um obstáculo para os alunos (Duval, 1995, citado por Almeida & Oliveira, 2009).

Durante a construção de representações gráficas de funções lineares, os alunos tiveram alguma dificuldade em compreender que necessitavam de dois pontos para construírem a representação gráfica pedida. Muitas vezes, os alunos utilizaram a origem do referencial e um segundo ponto qualquer que não pertencia à função. Foram ainda visíveis dificuldades ao nível da coordenação motora quando os alunos tentavam desenhar retas, mesmo com a ajuda da régua e do papel quadriculado. Para os alunos, o processo de assinalar dois pontos e uni-los é, nesta fase, ainda complicado, pois o traço ainda não é preciso ou, por vezes, não compreendem que a reta é infinita não devendo ‘terminar’ nos pontos que marcaram no referencial para a construir. Este facto reforça a ideia que Ponte nos diz segundo a qual os alunos chegam a esta fase ainda com dificuldades em construir representações (Ponte, 1984 citado por Loureiro, 2013).

Relativamente a conceitos foram, também, observadas dificuldades relativamente ao conceito de função. Esta dificuldade é apontada também por Elia et al (2007), bem como as transições entre representações, que estes alunos também evidenciam. Na minha turma surgiram dificuldades em compreender que as representações gráficas de funções não têm de passar sempre na origem do referencial. Na minha opinião, esta dificuldade está relacionada com o facto de os alunos terem estudado a função linear em primeiro lugar, o que poderá ter feito com que ficassem com a ideia errada referida.

Na verdade, os alunos mostraram que não tinham compreendido a noção de função, pois para eles uma função era uma reta que passava na origem do referencial, mesmo que fosse uma reta vertical. Esta dificuldade surgiu na primeira aula e foi esclarecida recorrendo a exemplos de representações de funções que não passavam na origem do referencial, a representações que não eram de funções, mas que passavam na origem do referencial, e ainda a uma leitura e análise da definição de função. O que observei nos meus alunos é que confundiam a representação gráfica de uma função linear com a representação gráfica de uma função qualquer, ou seja, para os alunos só representa uma função, uma reta que contenha a origem do referencial. Este exemplo reforça a ideia de Vergnaud (1998) de que não existe uma relação direta entre palavras e símbolos, nem um acordo direto de significados entre duas ou mais pessoas.

Também foram manifestas dificuldades em transitar entre representações por parte dos alunos, principalmente quando têm de partir da expressão algébrica e passar para a representação gráfica. No caso da Alice, por exemplo, aluna parte da expressão algébrica de uma função afim, não linear, e constrói a representação gráfica de uma função linear sem questionar o que fizera.

No decorrer das aulas os alunos mostraram, ainda, dificuldades em distinguir os três tipos de funções, no que respeita à sua representação gráfica. Tiveram especial dificuldade em distinguir a representação gráfica de uma função linear da representação gráfica de uma afim, como pude verificar com caso da Francisca que, além desta dificuldade, mostra no decorrer da entrevista que não compreende que as expressões 'o gráfico da função passar na origem do referencial' e 'o gráfico da função passar no ponto (0,0)' têm o mesmo significado.

Quando construí a Questão de aula n.º 5, introduzi uma variação na escala dos eixos do referencial, em vez de uma escala unitária apliquei, ao contrário do que era usual, uma escala com numerais decimais, o que fez com que o Pedro tivesse dificuldades em resolver a primeira pergunta. Assim, apercebi-me que a introdução de variações de modo não sistemático pode causar dificuldades aos alunos.

Ao avançar na análise dos dados, verifiquei que os alunos mostram dificuldades em identificar o efeito da variação dos parâmetros da equação de uma função na sua representação gráfica. Existem casos em que os alunos partem de uma representação algébrica em que o coeficiente de x é negativo e esboçam uma reta de declive positivo. Esta incorreção é referida por Elia et al (2007) que aponta ainda outras dificuldades como transitar entre representações e trabalhar com problemas que envolvem funções, partindo de expressões algébricas. Nestes casos, os alunos não identificam que o declive da reta é o coeficiente de x na expressão algébrica (ou na equação da reta) e não compreendem que o seu sinal influencia a localização da reta no referencial, a sua ‘inclinação’ em relação aos eixos. Ainda relativamente ao declive de uma reta, os alunos manifestaram dificuldades quando tinham a representação gráfica, porque não conseguem identificar o sinal do declive diretamente por observação da representação gráfica.

Relativamente à ordenada na origem, os alunos tiveram dificuldade em identificar que se tratava do ponto de interseção do eixo das ordenadas com a representação gráfica da função e, ainda, que a poderiam obter diretamente por observação da representação gráfica, não havendo necessidade de recorrer a processos algébricos. Este facto mostra que os alunos têm dificuldades em interpretar gráficos. Ao nível da construção de gráficos surgiram ainda outras dificuldades, por duas razões, os alunos não associam as expressões algébricas às respetivas representações gráficas e, por vezes, não lêem os enunciados onde essa informação está escrita.

Que dificuldades evidenciam os alunos na representação algébrica funções afins a partir da representação gráfica?

No decorrer das aulas verifiquei que os alunos manifestavam dificuldades em substituir a variável independente por um valor na equação de uma função, ou seja os alunos mostraram dificuldades em calcular a imagem de um objeto, como nos fala Domingos (1994) e Loureiro (2013). Um outro tipo de erro relacionado com esta dificuldade foi feito pelos alunos: substituem a variável independente no primeiro membro da equação ($f(x)$) por um dado valor e não o fazem no segundo membro, ou vice-versa, como foi o caso do Bruno que terminou a sua resolução com o esquecimento do primeiro membro da equação.

Ao tentar que os alunos ultrapassassem esta dificuldade, deparei-me com outra dificuldade por parte dos alunos, a dificuldade em efetuar cálculos que envolvam operações com inteiros, nomeadamente a aplicação da regra dos sinais. Para além destas, manifestaram ainda dificuldades em manipular expressões algébricas, tal como identifica Ponte (1990) no seu estudo, quando tinham de aplicar a propriedade distributiva da multiplicação. Outra dificuldade evidenciada relaciona-se com as operações com frações: alguns alunos não sabem identificar quando têm de reduzir ao mesmo denominador e quando retirar os denominadores. Finalmente, nas dificuldades de cálculo, vários alunos não sabem, identificar quando é que uma fração se encontra na forma de fração irredutível e, em casos mais extremos, existem alunos que não interiorizaram a noção de número racional, não reconhecendo a fração com um quociente da divisão entre dois números inteiros.

Para os alunos é também difícil identificar quando estão em presença de igualdades ou equivalências, tendo dificuldade em lidar com a simbologia formal algébrica, tal como nos refere Kaput (Kaput citado por Loureiro, 2013). Mesmo quando utilizam corretamente os sinais equivalência surgem outros problemas, como esquecimento do primeiro membro da equação.

No decorrer deste estudo foi ainda possível observar dificuldades ao nível da escrita de equações de retas. Algumas vezes este facto esteve relacionado com distrações dos alunos, calculando corretamente o valor dos parâmetros necessários, mas falhando a escrita da equação, como foi o caso do Miguel. Quando os alunos partem da representação gráfica e têm de escrever a equação da reta evidenciaram-se duas dificuldades. A primeira prende-se com a identificação do tipo de expressão associada a cada representação gráfica e a segunda, com o cálculo dos parâmetros da expressão.

Relativamente ao cálculo dos parâmetros da equação de uma reta, no que diz respeito à determinação do seu declive, os alunos frequentemente não dão importância à ordem pela qual escrevem as coordenadas dos pontos na expressão utilizada para determinar o declive. A determinação da ordenada na origem mostra-nos outro tipo de dificuldade, com ligação a outros conteúdos matemáticos. Os alunos manifestam também dificuldades na resolução de equações, pois, por exemplo, muitas vezes ao tentarem determinar o valor de *b (em* $y = ax + b$) , não têm presentes as regras de resolução. Pudemos ainda perceber que os alunos têm dificuldades em estabelecer conexões entre o estudo de funções afim e a resolução de equações, situação que está de acordo com as dificuldades apontadas por Knuth (2000).

Finalmente foram encontradas dificuldades ao nível da interpretação do enunciado de problemas (Elia et al, 2007). Os alunos mostram dificuldades em identificar os dados de que precisam para resolver o problema em questão, de um conjunto mais amplo de informações, não sabem o que aplicar e onde, e muitas vezes também o que é pedido, bem como em interiorizar que têm de ler os enunciados com atenção e até ao fim. É ainda de salientar que, quando a expressão algébrica é formulada em linguagem natural, por esta ser mais ambígua, como nos diz Tabach e

Friedland (2001), com frequência não sabem como proceder. Para além disto, em geral, todo o enunciado que peça a transição entre representações não é fácil para os alunos.

Reflexão final

Este ano letivo representa para mim uma experiência de vida inesquecível, não só porque atingi o meu objetivo de dar aulas, mas pelo que me permitiu aprender enquanto professora. Do ponto de vista profissional considero que este ano letivo me permitiu evoluir de modo a ser uma melhor professora, a compreender melhor o meu papel, a identificar as dificuldades diárias da vida de um professor e, ainda, a aprender como devemos proceder para realizar uma investigação.

O período de construção e seleção das tarefas e dos apoios que construí para as aulas, deu-me um grande prazer, pois permitiu-me aprender como devo preparar as minhas aulas, compreender que objetivos defini para os meus alunos e o que devo fazer para os atingir. Sei que, apesar de toda esta preparação, terei sempre 'surpresas' em sala de aula, mas com uma aula bem preparada serão sempre possíveis de resolver.

Nas minhas aulas, o uso do computador e do *datashow* foi, permanente, o que me ajudou na organização de apresentações minhas e no trabalho com os alunos, e o que me proporcionou mais aprendizagens, pois trabalhei imenso com o Geogebra na construção dos materiais. Dei ainda a conhecer aos alunos a calculadora gráfica para os ajudar na realização de uma exploração. Este contacto com a calculadora gráfica permitiu aos alunos ir mais longe na sua aprendizagem, retirando conclusões pertinentes, de modo consistente. Nesta exploração utilizei ainda outro *software* que me permitiu projetar uma calculadora gráfica, exatamente igual à que disponibilizei aos alunos e que se mostrou uma mais-valia em sala de aula. No decorrer das aulas, os alunos mostraram-se participativos, interessados, empenhados, entusiasmados e com vontade de aprender.

O refletir, depois de uma aula, acerca do que se passou, ajudou-me sempre a ajustar o trabalho para a aula seguinte, mesmo quando era realizado apenas de forma oral com os orientadores. Os conhecimentos e o apoio da minha orientadora cooperante foram essenciais e indispensáveis para conseguir adequar os materiais desenvolvidos aos objetivos de aprendizagem da turma. Contudo, a minha gestão do tempo definido para cada momento da aula continua a ser um aspeto a melhorar no futuro. Penso que melhorei no decorrer da lecionação tornando as minhas aulas mais direcionadas para o que os alunos necessitam, mesmo que isso implique abandonar, em parte, os planos de aula. As aulas foram, também, evoluindo no sentido de serem mais calmas, dando espaço aos alunos para aproveitarem a troca de conhecimentos entre eles. Outro aspeto a melhorar relaciona-se com as discussões colectivas na turma, pois devo dar mais atenção ao que se está a realizar no quadro e não ficar tão preocupada com a turma em geral.

Relativamente a outros aspetos positivos, acho que é de salientar a minha relação com a turma de modo geral, a interação positiva quando se discutia um exemplo, uma questão ou uma definição, a aprendizagem significativa realizada pelos alunos neste tema e os resultados obtidos. O trabalho em pares mostrou ser muito importante e positivo, apesar de as respostas serem apresentadas do ponto de vista individual. A Questão de aula permitiu revelar dificuldades que não foram ultrapassadas pelos alunos mas, por outro lado, evidenciou também estratégias escolhidas pelos alunos baseadas numa aprendizagem bem conseguida.

A componente de cariz investigativo do trabalho que realizei foi, para mim, um grande desafio. Em primeiro lugar, porque nunca tinha realizado uma investigação, o que me fez sentir perdida, mas ao mesmo tempo me obrigou a encontrar novos caminhos e a desafiar-me de modo permanente. Em segundo lugar, porque a escolha do tema foi feita de modo consciente, pelo interesse pessoal que tenho pelo tema das funções e pelas dificuldades que os alunos manifestam na compreensão deste tema. Deste modo, os dados recolhidos e as conclusões a que cheguei constituem um grande contributo para a minha aprendizagem e, ainda, para a minha futura abordagem a este tema com outros alunos.

Este estudo contribuiu ainda para reforçar a importância do estudo das Funções na aprendizagem e no desenvolvimento do raciocínio abstrato dos alunos, e para intensificar a ideia de que as Funções têm uma relação tão próxima com a Álgebra que, não podemos aprender Funções sem ter compreendido verdadeiramente a Álgebra. A Álgebra é um domínio em que os alunos mostram grandes dificuldades, que são transferidas para a Funções, pois o seu carácter abstrato é idêntico. A questão de ter de lidar com uma linguagem própria também não ajuda, pois lidar com símbolos não é fácil para os alunos. Contudo, estas dificuldades podem ser atenuadas ou até ultrapassadas se, enquanto professores, tivermos consciência delas e dermos aos alunos oportunidade de com elas se confrontarem, tentando depois guiá-los no sentido de as superar.

Não posso, também, esquecer o contributo das aulas de Didática, de Metodologia e de IPP, que tantas vezes me guiaram neste caminho de altos e baixos que é ser professor de primeira viagem.

Finalmente, espero que o meu percurso profissional esteja sempre preenchido com o carinho que tenho tido dos alunos, com a constante oportunidade de melhorar através da reflexão e da colaboração com colegas e, ainda, com o contacto com outras investigações no sentido de melhorar as minhas aulas para que os alunos gostem de matemática e de aprender matemática.

Referências

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves (2013a). *Orientações Pedagógicas para o ano letivo 2013/14*. (disponível em http://aenunogoncalves.net/images/ano_letivo_2013_2014/documentos/LAL-2013-2014-Aprovado%20pelo%20CP.pdf)

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves (2013b). *Regulamento Interno*. (disponível em http://aenunogoncalves.net/images/ano_letivo_2013_2014/documentos/regulamento_interno_2013_Aprovado%20pelo%20CGT.pdf)

Almeida, A.C.& Oliveira, H. (2009). *O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem das funções do 11.° ano, Quadrante* , Vol. XVII, N.°1 e 2.

Caraça, B. J. (1958). *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Lisboa: Sá da Costa.

Domingos, A. M. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Lisboa: APM

Elia, I. et al. (2007*). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations.* International Journal of Science and Mathematics Education, 5, 533-556
Ferreira, J. C. (1988). *Introdução à análise matemática.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Fonseca,V.,Santos A., Nunes W. *Estudo Epistemológico do conceito de funções: uma retrospetiva*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p.1 – p.14, 2013.

Fredenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures, Kluwer Academic Publishers.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). *Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh (Eds.*), Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp.176-201). New-York, NY: Routledge

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher*, *93*(*1*), 48-53.

Loureiro, N.(2013). *A representação gráfica das funções lineares e afim: um estudo com alunos do 8.°ano.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Matos, A. (2008). *Explorando relações funcionais no 8.°ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Magalhães, I. (2014). *A resolução de3 problemas envolvendo figuras geométricas: um estudo no 7.° ano.* (Tese de Mestrado , Universidade de Lisboa)

Martins, H. (2014). *Dificulades na resolução de equações do 2.° grau dos alunos do 8.° ano.* (Tese de Mestrado , Universidade de Lisboa)

Mateus, A. (2013). *A capacidade de generalização no estudo das funções no 8.º ano.*

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

ME, (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico.* Lisboa: ME.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1990). *O conceito de função no currículo da Matemática*, Educação e Matemática, 15,3- 9

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. Em, Menezes, Santos, Gomes e Rodrigues (org.) *Avaliação em matemática: problemas e desafios*. Viseu: SEM-SPCE

Sebastião e Silva, J. (1974). *Compêndio de Matemática.* Lisboa: G.E.P.

Vergnaud, G. (1998). *A comprehensive theory of representation for mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, 17*(*2*), 167-181.

YOUSCHKEVITCH, A. P. *Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIXe siècle.In:Fragments d´historie des Mathématiques.* Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7-67, 1981.

Anexos

Anexo I – Plano de aula 1 – 13 de Abril de 2015

Plano de Aula (13 de Abril de 2015)
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.
Ano letivo 2014/2015
Docente: Helena Fonseca
Turma: 8 º A, 24 alunos

Domínio/Conteúdos:

Funções: Definição de função; domínio e contradomínio; variáveis dependente e independente; variável numérica; função numérica; gráficos de funções numéricas de variável numérica; Funções constantes, lineares e afins; formas canónicas; coeficientes e termos independentes.

Conhecimentos prévios:

- Equações
- Resolução de equações.
- Operações com polinómios.
- Noção de referencial ortogonal monométrico.
- Noção de função, conceitos e terminologias associadas (exemplos: variáveis dependente e independente; variável numérica, função numérica de variável numérica; função constante, linear e afim; forma canónica).
- Diferentes tipos de representação de função e formas de representação associadas.

Objetivos:

No final desta aula, espero que os alunos tenham compreendido e interiorizado melhor a noção de função como aplicação de A em B, em que A é o conjunto de partida (domínio da função) e B o conjunto de chegada (contém o contradomínio da função) e que identifiquem uma função constante f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, por $f(x) = b$ ou $y = b$, em que b representa um número; a função linear como f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, por $f(x) = ax$ ou $y = ax$, em que a é o coeficiente da função linear e ainda a função afim como f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, por $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$, em que a é o coeficiente de x e b é o termo independente e ainda como se representa uma função afim na forma canónica. Espero ainda que: os alunos distingam variável dependente, independente e função numérica de variável numérica; identifiquem diferentes tipos de representação de uma função, gráfica, algébrica, através de uma tabela e através de um diagrama de setas; construam e interpretem gráficos e consigam passar da representação algébrica para a representação gráfica.

Recursos:

Tarefa 1: Revisões acerca de funções.
Computador.
Projetor.

Capacidades Transversais:

Estabelecimento de conexões matemáticas.

Espera-se que os alunos estabeleçam conexões matemáticas para que consigam relacionar funções e a expressão algébrica, funções e equações, funções e tabelas, funções e gráficos e finalmente funções com geometria. Assim, espera-se que os alunos saibam escrever a expressão algébrica de uma função como equação; saibam calcular a imagem de um dado objeto e o objeto dada a imagem. Os alunos terão ainda a oportunidade de estabelecer conexões entre as funções que são representadas graficamente por uma reta e a definição geométrica desta, pois geometricamente dois pontos definem uma reta e o mesmo será aplicado nas funções, os alunos poderão calcular mais pontos para construírem a representação gráfica da reta.

Raciocínio matemático.

Os alunos terão a oportunidade nesta aula de consolidar o conceito de função e os seus diferentes tipos de representação, podendo justificar as suas respostas acerca do processo a seguir para o fazer. Será dada ao aluno a possibilidade de argumentação para justificação da sua escolha na identificação de representações como funções ou não e ainda terão a oportunidade de usar os seus conhecimentos para calcular imagens de objetos e objetos cuja imagem é um valor dado. Os seus conhecimentos serão ainda requeridos para o reconhecimento e justificação de expressões algébricas de funções como funções constantes, lineares e afins.

Comunicação matemática.

A comunicação matemática estará presente na argumentação das ideias e dos conceitos matemáticos necessários para a justificação das suas respostas na resolução das tarefas. Será, também, parte integrante das discussões em grupo e, também, em pares, pois os alunos terão de exprimir os processos matemáticos de forma escrita e oral, usando notação e vocabulário adequados.

Resolução de problemas:

A resolução de problemas estará presente nesta aula proporcionando aos alunos a oportunidade de interpretação de representações e de análise de consequências da alteração dos dados. Os alunos terão ainda de identificar dados, condições e o objetivo de pequenas questões problemáticas.

Organização e Formas de Trabalho:

A aula terá a seguinte estrutura: existirão momentos de trabalho autónomo a pares, discussões em grande grupo (turma) e sistematização das aprendizagens feita em conjunto com o professor e a turma.

Desenvolvimento da Aula:

1. Revisão de conceitos lecionados no ano anterior acerca do domínio de funções. (15 minutos)

   Esta revisão será feita em conjunto com os alunos e o professor, tendo por base um PowerPoint composto por 4 slides iniciais, onde vamos rever a noção de função, domínio contradomínio, noção de objeto e imagem, conjunto de partida e conjunto de chegada. Este processo será feito com base no slide 1, através de duas correspondências sob a forma de diagrama de setas.

   Serão colocadas questões aos alunos como:

“Será que esta correspondência é uma função?”
“O que representa o conjunto A e como o designamos?” “E o conjunto B?”
“Como podem distinguir o conjunto de chegada e o contradomínio?”
Aqui também será evidenciada a diferença entre variável numérica e função numérica de variável numérica. No segundo slide 2, será mostrado uma terceira correspondência que não será um exemplo de função, para reforçar a a noção de função e para que seja dado um exemplo que não seja função.
No slide 3 serão lidas pelos alunos as definições discutidas, exemplificadas e explicadas no slide anterior e introduzida a notação adequada a cada uma delas. No slide 4, serão recordadas as diferentes formas de representar uma função, sendo usada sempre a mesma função para todos os diferentes tipos de representação que os alunos devem recordar. Assim, o slide contempla uma representação através de um diagrama de setas, uma representação sob a forma de uma tabela, uma representação algébrica e por fim a representação gráfica. No slide 5, serão discutidas com os alunos 3 representações gráficas, em que nenhum dos exemplos representa uma função para que os alunos recordem como devemos analisar estas representações de modo a reconhecer se se trata de uma função ou não.

2. Resolução de uma tarefa acerca da noção de função, em pares. (20 minutos)
   Será solicitada aos alunos a resolução apenas de 1) e 2).
   Durante o trabalho autónomo, os alunos estarão a resolver as questões da tarefa, em pares. O professor circulará pela turma acompanhando o trabalho dos alunos, esclarecendo dúvidas, selecionando as resoluções para a discussão.
   A resolução dos alunos será realizada na ficha de trabalho e será solicitado aos alunos que deixem as suas respostas erradas na folha indicando apenas que a sua resposta é outra caso identifiquem o erro.
   As restantes questões serão resolvidas num segundo momento de trabalho autónomo.
3. Nesta altura será feita a correção e discussão, apenas das alíneas solicitadas no ponto anterior. (10 minutos)
4. A questão 1) será apenas corrigida oralmente pelos alunos acompanhado de um registo das respostas pelo professor no quadro, tal como a 2) a), c), d), e) e f). A discussão será gerida pelo professor, pois irá ser realizada no quadro pelos alunos a resolução das restantes alíneas pois estas já não são de resposta direta e podem criar alguma ambiguidade através de respostas apenas orais.
   Pretende-se que os alunos mostrem como resolveram e, caso seja necessário, consigam identificar possíveis erros na resolução dos colegas e fazer sugestões de correção dos erros.
5. Revisão de conceitos lecionados no ano anterior acerca de tipos de funções. (20 minutos)
   Neste momento será retomado o PowerPoint, agora no slide 6, onde será colocada como questão de abertura “ Que funções já conheces?”.
   A primeira função a ser abordada será a função constante, que será recordada através da leitura, por um aluno, da definição e da notação que deve ser usada e reconhecida pelo aluno sempre que esta surgir. Serão ainda analisados dois exemplos, uma função constante negativa e outra positiva,

para tal será usada a ajuda de uma tabela, recordando os alunos de que as representações gráficas das funções que conhecem até agora são retas e, como tal, precisamos de pelo menos 2 pontos para que possamos usar como auxílio na representação gráfica desta função. Assim, existe uma tabela com o cálculo de 3 pontos e a respetiva representação gráfica em cada um dos casos.

Serão colocadas questões aos alunos:

"O que vai acontecer quando calcularmos a imagem de um qualquer objeto do domínio desta função?"

" Quantos pontos precisam de calcular para esboçar a reta?"

No slide 7, será seguida a mesma abordagem desta vez com a função linear, onde será lida a definição de função linear por um aluno e serão explorados dois exemplos, um de coeficiente linear positivo e outro negativo

Aqui será ainda realçado o fato de qualquer função linear passar no ponto $(0,0)$. Esta será realçada para que possamos fazer no slide seguinte a distinção entre a representação gráfica da função linear e da função afim.

No slide 8, será como esperado seguido o mesmo modelo, debruçado um olhar mais atento agora sob a função afim. Será lida a definição por um aluno, onde ainda será denominado o valor de a por coeficiente de x e de b por termo independente.

Os exemplos visam que os alunos compreendam que uma função afim vai ter uma representação de acordo com o coeficiente de x positivo ou negativo.

A noção do efeito do termo independente não será ainda abordada nesta aula.

Por fim serão exploradas duas representações gráficas no slide 9, onde podemos observar uma reta vertical que não representa uma função e uma função linear. Nestas duas representações será mais uma vez consolidada a noção de função agora através da observação destas duas representações ajudando os alunos a compreenderem melhor que a cada objeto não pode corresponder mais do que uma imagem e que representação pode ter um exemplo em que isto não acontece.

Aqui usaremos a tabela como auxilio para calcular pontos de cada um dos exemplos e concluiremos que apenas o exemplo da reta vermelha (função linear), representa uma função e discutiremos porquê.

Relativamente ao exemplo da reta vertical serão exploradas questões como:

"Qual a imagem do elemento 2 do conjunto de partida?

Esta questão tem como objetivo concluir que podemos expressar esta reta pela expressão $x = 2$.

No caso do exemplo com a função afim $y = x$ será seguido o mesmo processo, mas com o propósito de ajudar os alunos a compreenderem que cada objeto tem uma única imagem.

6. Resolução a pares das restantes questões da tarefa Revisões acerca de funções pelos alunos. (20 minutos)

   Durante o trabalho autónomo, os alunos estarão a resolver as questões da tarefa, em pares. O professor circulará pela turma acompanhando o trabalho dos alunos, esclarecendo dúvidas, selecionando as resoluções que serão escolhidas para a discussão.

7. Correção e discussão da tarefa revisões acerca de funções, em grande grupo. (15 minutos)
   Aqui serão corrigidas as questões 3) e 4). A única alínea que será corrigida apenas oralmente será a 3) alínea b), pois a explicação dos alunos passará por uma justificação oral durante a correção, onde devem expor as suas razões de modo a que todos compreendam e possam colocar possíveis dúvidas ou mesmo outras respostas que achem que devem ser debatidas. As restantes alíneas da questão 3) serão realizadas no quadro pelos alunos tal como a questão 4). Pretende-se que os alunos mostrem como resolveram e, caso seja necessário, consigam identificar possíveis erros na resolução dos colegas e fazer sugestões de correção dos erros.
   Caso não seja possível corrigir todas as alíneas, serão retomadas na aula seguinte.

Avaliação:

A avaliação será realizada, através de:

- Observação direta;
- Depois da aula será feito pelo professor um breve registo da participação dos alunos.

Dificuldades Previstas:

Nesta aula, são previstas algumas dificuldades por parte dos alunos tais como: identificar o domínio, contradomínio e ainda que o domínio e o conjunto de partida coincidem, mas o mesmo não acontece para o contradomínio, pois o conjunto de chegada pode ter mais elementos que o contradomínio da função; identificar a noção de função, saber justificar o que tem de acontecer para ser função ou não ser função e ainda compreender a noção de variável independente e dependente.

Esperam-se ainda dificuldades por parte dos alunos em identificar a função constante, linear e afim associando corretamente cada uma destas e as suas diferentes representações. Podem, ainda, surgir dificuldades na construção de representações que são funções e de outras que não são funções. Finalmente, devemos ter em conta que, para estes alunos ainda não é trivial a construção de gráficos de funções, pelo que podem surgir ainda dificuldades na determinação de pontos da reta e depois na sua marcação no referencial.

Anexo II – Plano de aula 2 – 15 de Abril de 2015

Plano de Aula (15 de Abril de 2015)
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.
Ano letivo 2014/2015
Docente: Helena Fonseca
Turma: 8 º A, 24 alunos

Domínio/Conteúdos:

Funções: Equação de uma reta não vertical e gráfico de uma função linear ou afim.

Conhecimentos prévios:

- Noção de equação.
- Resolução de equações.
- Operações com polinómios.
- Noção de referencial ortogonal monométrico.
- Noção de função e terminologias associadas.
- Teorema de Tales.
- Noção de função linear e função afim.
- Definição geométrica de reta.

Objetivos:

Espera-se que os alunos no final desta aula identifiquem situações onde devem aplicar o teorema de Tales e consigam compreender que com a ajuda deste teorema podem determinar abcissas ou ordenadas de pontos desconhecidas e ainda determinar a expressão algébrica de uma função linear. Espera-se também que, compreendam que o coeficiente de uma função linear é igual à ordenada do ponto do gráfico com abcissa igual a 1 e à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas dos pontos da reta, designando-o por declive da reta quando o referencial é ortogonal e monométrico.

Os alunos devem ter maior facilidade no final desta aula em construir gráficos de retas, pois será recordada a noção geométrica de reta, para que interiorizem que para construir o gráfico de uma reta precisam de pelo menos dois pontos.

Tem-se ainda por objetivo que os alunos compreendam o efeito da variação do declive de uma função linear na expressão algébrica da mesma, bem como na construção do gráfico da função linear. Após da observação de diferentes declives, os alunos devem ainda conseguir compreender a relação entre o sinal do declive e a inclinação da reta, isto é, espera-se que compreendam que se o declive é positivo a reta está no 1º e 3º quadrantes, quando é negativo está no 2º e no 4º quadrantes e, finalmente, caso o declive seja nulo passamos a ter uma reta horizontal, paralela ou coincidente com o eixo das abcissas.

Recursos:

Tarefa 2.
Computador.
Projetor.
Calculadora Gráfica Ti_83.

Capacidades Transversais:

Estabelecimento de conexões matemáticas.

Os alunos terão a oportunidade de estabelecer conexões matemáticas, através da relação existente entre os conceitos de geometria como o teorema de Tales, e a sua aplicação nas funções. Os alunos terão ainda de relacionar os conhecimentos, acerca da razão entre o comprimento dos segmentos, enquadrados em exemplos onde estão presentes funções lineares, com a finalidade de que, através desses conhecimentos geométricos, consigam retirar conclusões acerca das coordenadas de um determinado ponto da reta, ou mesmo determinar a equação dessa reta.

Raciocínio matemático.

Nesta aula os alunos terão oportunidade conjeturar, testar e justificar os conhecimentos e conclusões acerca da relação entre o teorema de Tales e as funções. Poderão, ainda, na mesma linha de pensamento, através de explorações com a ajuda da calculadora gráfica conjeturar, testar e retirar conclusões acerca do declive de uma reta e a influência deste no esboço da reta. Será dada ao aluno a possibilidade de argumentação para justificação das suas conclusões acerca do declive de uma reta na função linear.

Comunicação matemática.

A comunicação matemática estará presente na argumentação das ideias e dos conceitos matemáticos necessários para a justificação das suas respostas na resolução das tarefas. Será, também, parte integrante das discussões em grupo e em pares, pois os alunos terão de exprimir os processos matemáticos de forma escrita e oral, usando notação e vocabulário adequados.

Resolução de problemas.

Nesta aula os alunos terão a oportunidade de usar as TIC na resolução de uma exploração, que tem por objetivo a construção da noção de declive de uma reta na função linear, através da exploração de vários declives e da sua visualização na calculadora gráfica. Nesta exploração os alunos irão visualizar e compreender as consequências da alteração do valor do declive numa função linear.

Organização e Formas de Trabalho:

A aula terá a seguinte estrutura: existirão momentos de trabalho autónomo a pares, discussões em grande grupo (turma) e sistematização das aprendizagens feita em conjunto com o professor e a turma.

Desenvolvimento da Aula:

1. Redescobrindo o teorema de Tales. O teorema de Tales e a sua aplicação nas funções. (20 minutos)
   Esta aula terá como apoio o PowerPoint, onde no slide 1, os alunos terão a oportunidade de recordar o que nos diz o teorema de Tales. Para tal o enunciado do teorema será lido por um dos alunos e serão colocadas algumas questões com o intuito de que os alunos compreendam o enunciado do teorema e o que concluímos deste resultado. Para tal colocarei algumas questões que irei relacionar com a figura presente no mesmo slide e que servirá de apoio à explicação do teorema.
   "O que são duas retas concorrentes?"

“O que significa serem concorrentes em O?”

“O que significa que duas retas são paralelas?”

Depois de recordado e analisado o teorema de Tales, segue-se o slide 2, onde os alunos irão, com a ajuda do professor, discutir como podem descobrir a abcissa de um determinado ponto de uma função linear, com o objetivo de perceberem como podem aplicar o teorema de Tales nas funções. Para tal começarei por tentar que identifiquem que se trata de uma função linear, colocando de imediato a questão, “Que tipo de função é esta?”. Os alunos poderão apenas responder que é uma reta, mas se tal acontecer pretendo desenhar uma função afim rapidamente no quadro e voltar a questioná-los no sentido de distinguirem as duas retas, pois já sabem que uma se chama função linear e a segunda função afim e como se distinguem, pois terá sido recordado na aula anterior. Depois de concluirmos que estamos perante uma função linear, faremos em conjunto a análise da representação gráfica em questão, colocando sempre questões, tais como:

“O que observam na representação gráfica desta reta que nos possa ajudar a descobrir a abcissa do ponto $(x, 4)$?”

“Quantos pontos temos assinalados nesta reta? Quais são as suas coordenadas?”

“Como é que eu posso relacionar este exemplo com o teorema de Tales?”

“Que retas considero como retas concorrentes num ponto O? E como retas paralelas?”

De acordo com os dados que relação podem construir, de maneira a obter a abcissa do ponto?”

2. Realização de trabalho autónomo em pares pelos alunos de dois exercícios da tarefa 2. (20 minutos)
   Nesta fase os alunos realizarão apenas os exercícios 1 e 2 da tarefa 2, que os colocará perante duas aplicações do teorema de Tales. Nesta fase o professor circulará entre os alunos, esclarecendo possíveis dúvidas, fornecendo pistas para que os alunos consigam chegar às conclusões pretendidas tirando notas para possíveis pontos a discutir ou a questionar na discussão coletiva.

3. Nesta altura será feita a correção e discussão de ambos os exercícios no quadro pelos alunos e gerida pelo professor. (15 minutos)
   Pretende-se que os alunos mostrem como resolveram e, caso seja necessário, consigam identificar possíveis erros na resolução dos colegas e fazer sugestões de correção dos erros.

4. Exploração de um exemplo com os alunos para descobrir a equação de uma reta que passa por um ponto de ordenada desconhecida. (15 minutos)
   Será retomado o PowerPoint no slide 4, voltamos a explorar um exemplo de aplicação do teorema de Tales, mas desta vez tentando descobrir a ordenada de um ponto com o objetivo de descobrir o declive da reta para que possamos construir a equação da reta. Partiremos da associação desta reta com a função linear e do facto de a definirmos como $y = ax$, em que o valor

do a será descoberto através da relação com o teorema de Tales e da exploração dos dados que conhecemos.
"Que retas vamos considerar concorrentes?"
"Que retas vamos considerar paralelas?"
"Que relações entre os comprimentos de segmentos nos permitem tirar conclusões?"
Depois de encontrada a equação da reta passaremos às conclusões que este exemplo nos permitiu retirar e que estarão no slide 5. Estas conclusões serão lidas por um aluno e eu tentarei esclarecer possíveis dúvidas que possam surgir, tais como a observação de que o coeficiente linear de uma função é igual à imagem do objeto $x = 1$, numa função linear. Outra dúvida que poderá surgir prende-se com a notação $(x, f(x))$, que cria algum desconforto nos alunos devido ao facto de ainda não terem interiorizado que $f(x) = y$.
Neste slide será ainda identificado o declive de uma função linear com o coeficiente linear e que este pode ser calculado como a constante de proporcionalidade entre a ordenada e a abcissa de qualquer ponto da reta.

5. Resolução de uma exploração com objetivo de ajudar os alunos a compreender o efeito do declive de uma função linear, com a ajuda da calculadora gráfica. (15 minutos)
   Estará projetado no quadro os valores de a (coeficientes de funções lineares), no slide 6 para os quais os alunos devem realizar a exploração. Para que não se percam, e porque o quadro será necessário à exploração com a calculadora, será solicitado que copiem para a folha, onde será realizada a exploração o enunciado presente nesse slide.
   Nesta fase será realizada uma exploração dos alunos acerca do efeito de diferentes declives na função linear. Para tal terei no meu computador software que me permitirá projetar uma calculadora gráfica TI-83, igual à que será dada a cada par de alunos e com o qual irei ensinar os alunos a introduzir as equações das retas e a executar os gráficos para que os possam desenhar numa folha quadriculada que lhes será fornecida por mim. Pedirei aos alunos para indicarem em cada reta desenhada o respetivo declive. Apenas realizarei com os alunos 1 exemplo de declive positivo e outro negativo, devido ao facto de precisarmos de colocar o sinal negativo para que nos seja desenhada a reta que pretendemos. Após a explicação acerca do funcionamento das máquinas, os alunos trabalharão de forma autónoma, em pares, e poderei circular entre os eles esclarecendo possíveis dúvidas, fornecendo pistas para que consigam chegar às conclusões pretendidas, tirando notas para possíveis pontos a discutir ou a questionar na discussão coletiva.

6. Discussão e sistematização das conclusões acerca da exploração com ajuda do *software*. (10 minutos)
   Discutiremos em conjunto, em primeiro lugar, o efeito do declive positivo e onde vão ficar todas essas retas no referencial cartesiano e que relação vai existir entre o declive e os quadrantes onde se vai encontrar a reta. O mesmo

processo será seguido para o declive negativo e as conclusões a retirar, finalmente será analisado o que acontece quando o declive é zero.

Depois desta análise serão sistematizadas as conclusões discutidas com a turma, colocadas já no slide 7, onde estão presentes um exemplo de cada tipo de declive numa função afim e as respetivas tabelas onde são calculados pontos destas três retas de forma a que os alunos compreendam que ao calcularem os pontos das retas conseguem esboçar o seu gráfico e, ainda, a noção de que o sinal do declive implica alterações na inclinação da reta, de acordo com o sinal e, por fim, o caso em que o declive é nulo que vai resultar numa reta horizontal.

Avaliação:

A avaliação será realizada, através de:

- Observação direta;
- Depois da aula será feito pelo professor um breve registo da participação dos alunos.

Dificuldades Previstas:

Esperam-se algumas dificuldades nesta aula, tais como, dificuldades na compreensão da relação do teorema de Tales com as funções e na identificação das situações onde o devem aplicar, bem como na forma de o fazer. Poderão ainda surgir algumas dificuldades, por exemplo, no caso em que não seja para determinar a abcissa desconhecida de um ponto, mas sim a ordenada e ainda, como podemos observar na segunda questão da tarefa 2, no caso em que é pedido ao aluno que determine a equação da reta.

Podem existir alguns alunos que ainda tenham dificuldade em identificar a expressão algébrica de uma função afim e a sua representação gráfica. No caso da função afim, podem também surgir dificuldades em compreender como podem determinar o declive da função e identificar o declive de uma função linear dada a sua expressão algébrica. Devemos ainda prever que os alunos podem ter dúvidas acerca da relação entre o sinal do declive e a sua relação com a respetiva inclinação da reta e, ainda, os quadrantes onde esta vai estar em cada caso. Outra questão que pode ser mais problemática para os alunos prende-se com o caso em que o declive da reta é nulo e a compreensão da relação entre uma função afim de declive nulo e a função constante, tanto no que diz respeito à expressão algébrica quanto à representação gráfica.

Podem ainda surgir algumas dificuldades ligadas ao manuseamento da calculadora gráfica, pois esta será a primeira aula em que os alunos terão contacto com este recurso.

Anexo III – Plano de aula 3 – 20 de Abril de 2015

Plano de Aula (20 de Abril de 2015)
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.
Ano letivo 2014/2015
Docente: Helena Fonseca
Turma: 8 º A, 24 alunos

Domínio/Conteúdos:

Funções: Equação de uma reta não vertical e gráfico de uma função linear ou afim.
Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical.

Conhecimentos prévios:

- Noção de equação.
- Resolução de equações.
- Noção de referencial ortogonal monométrico.
- Noção de função e terminologias associadas.
- Noção de função linear e função afim.
- Definição geométrica de reta.

Objetivos:

Esta aula tem por objetivo dar a oportunidade aos alunos de reconhecerem que as retas não verticais são gráficos de funções afins e que se podem representar pela equação $y = ax + b$, e identificar a por "declive" da reta e b por "ordenada na origem". Será ainda muito importante que os alunos compreendam como determinar o declive de uma reta não vertical dados dois pontos distintos. É esperado ainda que os alunos compreendam a relação entre o declive de uma reta, representada por uma função afim e o efeito da variação deste parâmetro na sua representação gráfica e ainda na sua representação algébrica.

Relativamente à ordenada na origem é importante que os alunos a consigam identificar na representação algébrica e na gráfica. Espera-se ainda que compreendam como determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico e, finalmente, que compreendam que fixando o declive numa função afim diferentes ordenadas na origem vão originar retas diferentes.

Recursos:

Tarefa 2.
Computador.
Projetor.
Calculadora Gráfica Ti_83.

Capacidades Transversais:

<u>Estabelecimento de conexões matemáticas.</u>

É esperado que os alunos estabeleçam conexões matemáticas, através da relação existente entre os conceitos de geometria como a noção de reta e a sua aplicação nas funções. Os alunos terão a oportunidade de relacionar os conhecimentos acerca da razão entre o comprimento dos segmentos enquadrados em exemplos onde estão presentes funções afins com a finalidade de, através desses conhecimentos geométricos, compreender como podem determinar o declive de uma reta, gráfico de uma função afim e estabelecer a relação entre o declive e a inclinação da reta.

Raciocínio matemático.

Nesta aula os alunos terão oportunidade de conjeturar, testar e justificar os conhecimentos e conclusões acerca da razão definida atrás: da diferença entre as ordenadas sobre a diferença entre as abcissas. Poderão ainda, na mesma linha de pensamento, e através de explorações e com a ajuda da calculadora gráfica conjeturar, testar e retirar conclusões acerca da ordenada na origem de uma reta e compreender a influência da ordenada na origem na representação gráfica da reta e ainda na sua expressão algébrica. Será dada ao aluno a possibilidade de argumentação para justificação das suas conclusões acerca da ordenada na origem de uma reta, gráfico de uma função afim.

Comunicação matemática.

A comunicação matemática estará presente na argumentação das ideias e dos conceitos matemáticos necessários para a justificação das suas respostas na resolução das tarefas. Será, também, parte integrante das discussões em grupo e em pares, pois os alunos terão de exprimir os processos matemáticos de forma escrita e oral, usando notação e vocabulário adequados. Os alunos poderão exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando notação, simbologia e vocabulário próprios.

Resolução de problemas.

Nesta aula os alunos terão a oportunidade de usar tecnologias na resolução de uma exploração, que tem por objetivo a construção da noção de ordenada na origem de uma reta, gráfico de uma função afim, através de uma exploração onde será fixado o declive e atribuídos diferentes valores à ordenada na origem. Assim, com o auxílio da calculadora gráfica, poderão realizar a variação dos parâmetros de forma mais rápida e visualizar as respetivas variações para retirarem as suas conclusões. Os alunos terão assim oportunidade de justificar as suas conclusões com a ajuda do que visualizaram na calculadora, podendo assim compreender melhor os efeitos da variação deste parâmetro. Os alunos terão ainda a oportunidade de construir gráficos de funções e determinar a expressão algébrica de funções lineares e afins o que lhes exigirá a análise dos dados que lhes são fornecidos. Terão, também, de lidar com diferentes abordagens tais como, terem a expressão algébrica e ser-lhes pedido que construam o gráfico, terem a representação gráfica e dois pontos da reta e terem de determinar a expressão algébrica e ainda no caso da função linear, terem um ponto e terem de determinar a expressão algébrica.

Organização e Formas de Trabalho:

A aula terá a seguinte estrutura: existirão momentos de trabalho autónomo a pares, discussões em grande grupo (turma) e sistematização das aprendizagens feita em conjunto com o professor e a turma.

Desenvolvimento da Aula:

1. Realização de esclarecimento de dúvidas acerca do trabalho de casa recolhido na aula anterior. (10 minutos)
   A aula terá início com a distribuição dos trabalhos de casa recolhidos na aula anterior corrigidos. Nesta fase serão colocadas algumas questões para que possamos esclarecer possíveis erros ou dúvidas da turma.

2. Exploração através de um exemplo de como determinar a expressão algébrica de uma função afim. (25 minutos)
Após o esclarecimento de dúvidas iniciaremos a exploração de um exemplo, em que será projetado o slide 1, onde podemos inicialmente observar uma reta num referencial cartesiano da qual os alunos apenas conhecem dois pontos. Em primeiro lugar será colocada a questão:
"Será que esta reta é a representação de uma função linear?"
Nesta altura os alunos devem já conseguir compreender que a representação gráfica de uma função linear contém a origem do referencial o que não acontece com o exemplo que estarão a analisar. Depois será relembrada com os alunos a forma como aprenderam a determinar o declive de uma função linear (através da razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto), então será colocada a seguinte questão:
"Então e neste exemplo que dados tenho acerca da reta?"
Vou pedir aos alunos que pensem que o seu outro ponto da função linear é a origem do referencial e transpondo para o nosso exemplo, utilizaremos os dois pontos que temos, onde vamos imaginar que podemos deslocar a origem do referencial para o ponto mais próximo deste e aplicar o mesmo processo, mas com os pontos a reta que temos.
Assim determinaremos o declive da função afim. Serão então colocadas as questões:
"Já temos a equação da reta?"
"Como definimos uma função afim?"
Aqui os alunos irão identificar que ainda nos falta a ordenada na origem. Nesta fase não só tentarei que os alunos compreendam melhor a noção intuitiva de ordenada na origem através da interpretação do significado de ordenada na origem, para que os alunos compreendam que por vezes podemos determiná-la apenas por observação do gráfico, mas depois será ainda mostrado aos alunos como a podemos determinar através da resolução de uma equação do primeiro grau, em que utilizamos 1 ponto da reta para substituir no valor da abcissa e da ordenada e passamos a ter uma equação em que a nossa incógnita é b, ou seja, exatamente o que queremos descobrir. Assim determinaremos a equação da reta que representa a função afim apresentada. Será ainda feita uma sistematização das conclusões retiradas do slide 1, no slide 2, onde os alunos poderão contatar com a notação usada num caso geral.
É provável que os alunos possam estranhar a denominação de dois pontos quaisquer de uma reta por (x_A, y_A) e (x_B, y_B), pois os alunos conhecem as coordenadas de um ponto como (x, y), mas esta dificuldade pode facilmente ser superada explicando que como estamos a falar de dois pontos temos de ter uma forma de os distinguir e daí o índice A e B em cada um dos pontos.

3. Realização de uma exploração pelos alunos com a calculadora gráfica acerca da ordenada na origem do gráfico de uma função afim. (15 minutos)
Nesta fase será realizada uma exploração dos alunos acerca do efeito de diferentes ordenadas na origem na representação gráfica da função afim.

Para tal terei no meu computador software que me permitirá projetar uma calculadora gráfica TI-83, igual à que será dada a cada par de alunos, e com o qual irei ensinar os alunos a introduzir as equações das retas e a executar os gráficos para que os possam desenhar numa folha quadriculada que lhes será fornecida por mim. Pedirei aos alunos para que, em cada reta desenhada na sua folha, assinalem a ordenada na origem e as suas conclusões. Apenas realizarei com os alunos 1 exemplo de ordenada na origem positiva e outra negativa. Após a explicação acerca do funcionamento das máquinas, os alunos trabalharão de forma autónoma em pares e poderei circular entre eles esclarecendo possíveis dúvidas, fornecendo pistas para que os alunos consigam chegar às conclusões pretendidas e tirando notas para possíveis pontos a discutir ou a questionar na discussão coletiva.

4. Discussão e sistematização das conclusões acerca da exploração com ajuda do *software*. (15 minutos)
   Discutiremos em conjunto, em primeiro lugar, o efeito da ordenada na origem positiva e em que zona vai estar a interseção da reta com o eixo dos yy se na parte onde as imagens são positivas ou negativas? O mesmo processo será seguido para a ordenada na origem negativa e as conclusões a retirar. Finalmente será analisado o que acontece quando a ordenada na origem é zero, sendo aqui evidenciado aos alunos que a função afim "contém" a função linear, sendo esta última um caso particular da função afim.
   Depois desta análise serão sistematizadas as conclusões discutidas com a turma, colocadas já no slide 4, onde estão presentes um exemplo de cada, um com ordenada na origem negativa, outro com ordenada na origem positiva e o caso em que é nula.

5. Continuação da resolução da tarefa 2, iniciada na aula anterior. (20 minutos)
   Será retomada a tarefa2, onde os alunos irão trabalhar autonomamente, em pares. Como os alunos já realizaram os exercícios 1 e 2, na aula anterior, este momento de trabalho autónomo dedica-se então a terminar esta tarefa, tendo de realizar os exercícios 3, 4, 5 e 6. O professor circulará então pela turma, acompanhando o trabalho dos alunos, esclarecendo dúvidas, fornecendo pistas e selecionando as resoluções para a discussão.

6. Discussão e resolução da tarefa 2 em conjunto com a turma. (15 minutos)
   Os alunos precisarão de tempo, pois têm de desenhar os gráficos das funções, para facilitar esta tarefa terei um slide já preparado para ajudar os alunos a desenharem as retas no quadro. Esta grelha será projetada tanto para o exercício 3 quanto para o exercício 5. No exercício 5 será ainda projetada a tabela no quadro para os alunos a preencherem. Como os alunos já realizaram os exercícios 1 e 2, na aula anterior, este momento de trabalho autónomo dedica-se então a terminar esta tarefa, tendo de realizar os exercícios 3, 4, 5 e 6. No decorrer da discussão o professor terá o cuidado de chamar à atenção dos alunos para a diferença entre a representação gráfica de uma função linear e de uma função afim. A discussão será gerida pelo

professor de modo a que os alunos exponham as suas dúvidas, conjeturas e conclusões.

7. Trabalho de casa: Ficha de tpc_3.

Avaliação:

A avaliação será realizada, através de:

- Observação direta;
- Depois da aula será feito pelo professor um breve registo da participação dos alunos.

Dificuldades Previstas:

Nesta aula poderão surgir algumas dificuldades relativamente à determinação do declive de uma reta não vertical dados dois pontos distintos e ainda na determinação da ordenada na origem. Os alunos podem não identificar que para determinar a ordenada na origem tendo o declive apenas têm de substituir x e y, utilizando um ponto da reta, na equação da reta e resolver a equação em ordem a b.

Podem, também, surgir dificuldades em identificar o termo independente na expressão algébrica de uma função afim com a ordenada na origem. Relativamente à representação gráfica os alunos podem ter algumas dificuldades em compreender que se a ordenada na origem é positiva a reta interseta o eixo do yy em ordenadas positivas, se é negativa a reta interseta o eixo do yy em ordenadas negativas e que quando a ordenada na origem é nula estamos em presença de um caso particular em que a função passa a uma função linear, pois a ordenada na origem é nula. São de ter em consideração ainda outras dificuldades como confundir as abcissas e as ordenadas, marcar pontos no referencial cartesiano ou ainda identificar o declive e a ordenada na origem de uma função afim ou linear dada a expressão algébrica. Relativamente à representação gráfica poderão ainda surgir dificuldades em identificar em que quadrantes se situa a reta quando declive é positivo ou quando o declive é negativo.

Os alunos poderão ainda ter dúvidas na construção do gráfico de funções como lhes é pedido na tarefa 2, na questão 3 ou ainda na questão 5, onde os dados da questão mostram uma representação gráfica da reta e dois pontos distintos da mesma para que possam determinar a sua expressão algébrica. Outra situação que poderá trazer dificuldades aos alunos prende-se com a última questão em que os alunos devem escrever a expressão algébrica da função linear que passa pelo ponto dado.

Anexo IV – Plano de aula 4 – 22 de Abril de 2015

Plano de Aula (20 de Abril de 2015)
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.
Ano letivo 2014/2015
Docente: Helena Fonseca
Turma: 8 º A, 24 alunos

Domínio/Conteúdos:
Funções: Equação de uma reta não vertical e gráfico de uma função linear ou afim.
Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical.

Conhecimentos prévios:
- Noção de equação.
- Resolução de equações.
- Noção de referencial ortogonal monométrico.
- Noção de função e terminologias associadas.
- Noção de função linear e função afim.
- Definição geométrica de reta.

Objetivos:
Esta aula tem por objetivo dar a oportunidade aos alunos de reconhecerem que as retas não verticais são gráficos de funções afins e que se podem representar pela equação $y = ax + b$, e identificar a por "declive" da reta e b por "ordenada na origem". Será ainda muito importante que os alunos compreendam como determinar o declive de uma reta não vertical dados dois pontos distintos. É esperado ainda que os alunos compreendam a relação entre o declive de uma reta, representada por uma função afim e o efeito da variação deste parâmetro na sua representação gráfica e ainda na sua representação algébrica.

Relativamente à ordenada na origem é importante que os alunos a consigam identificar na representação algébrica e na gráfica. Espera-se ainda que compreendam como determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico e, finalmente, que compreendam que fixando o declive numa função afim diferentes ordenadas na origem vão originar retas diferentes.

Recursos:
Tarefa 2.
Computador.
Projetor.
Calculadora Gráfica Ti_83.

Capacidades Transversais:
<u>Estabelecimento de conexões matemáticas.</u>
É esperado que os alunos estabeleçam conexões matemáticas, através da relação existente entre os conceitos de geometria como a noção de reta e a sua aplicação nas funções. Os alunos terão a oportunidade de relacionar os conhecimentos acerca da razão entre o comprimento dos segmentos enquadrados em exemplos onde estão presentes funções afins

com a finalidade de, através desses conhecimentos geométricos, compreender como podem determinar o declive de uma reta, gráfico de uma função afim e estabelecer a relação entre o declive e a inclinação da reta.

Raciocínio matemático.

Nesta aula os alunos terão oportunidade de conjeturar, testar e justificar os conhecimentos e conclusões acerca da razão definida atrás: da diferença entre as ordenadas sobre a diferença entre as abcissas. Poderão ainda, na mesma linha de pensamento, e através de explorações e com a ajuda da calculadora gráfica conjeturar, testar e retirar conclusões acerca da ordenada na origem de uma reta e compreender a influência da ordenada na origem na representação gráfica da reta e ainda na sua expressão algébrica. Será dada ao aluno a possibilidade de argumentação para justificação das suas conclusões acerca da ordenada na origem de uma reta, gráfico de uma função afim.

Comunicação matemática.

A comunicação matemática estará presente na argumentação das ideias e dos conceitos matemáticos necessários para a justificação das suas respostas na resolução das tarefas. Será, também, parte integrante das discussões em grupo e em pares, pois os alunos terão de exprimir os processos matemáticos de forma escrita e oral, usando notação e vocabulário adequados. Os alunos poderão exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando notação, simbologia e vocabulário próprios.

Resolução de problemas.

Nesta aula os alunos terão a oportunidade de usar tecnologias na resolução de uma exploração, que tem por objetivo a construção da noção de ordenada na origem de uma reta, gráfico de uma função afim, através de uma exploração onde será fixado o declive e atribuídos diferentes valores à ordenada na origem. Assim, com o auxílio da calculadora gráfica, poderão realizar a variação dos parâmetros de forma mais rápida e visualizar as respetivas variações para retirarem as suas conclusões. Os alunos terão assim oportunidade de justificar as suas conclusões com a ajuda do que visualizaram na calculadora, podendo assim compreender melhor os efeitos da variação deste parâmetro. Os alunos terão ainda a oportunidade de construir gráficos de funções e determinar a expressão algébrica de funções lineares e afins o que lhes exigirá a análise dos dados que lhes são fornecidos. Terão, também, de lidar com diferentes abordagens tais como, terem a expressão algébrica e ser-lhes pedido que construam o gráfico, terem a representação gráfica e dois pontos da reta e terem de determinar a expressão algébrica e ainda no caso da função linear, terem um ponto e terem de determinar a expressão algébrica.

Organização e Formas de Trabalho:

A aula terá a seguinte estrutura: existirão momentos de trabalho autónomo a pares, discussões em grande grupo (turma) e sistematização das aprendizagens feita em conjunto com o professor e a turma.

Desenvolvimento da Aula:

1. Realização de esclarecimento de dúvidas acerca do trabalho de casa recolhido na aula anterior. (10 minutos)
   A aula terá início com a distribuição dos trabalhos de casa recolhidos na aula anterior corrigidos. Nesta fase serão colocadas algumas questões para que possamos esclarecer possíveis erros ou dúvidas da turma.

2. Exploração através de um exemplo de como determinar a expressão algébrica de uma função afim. (25 minutos)

   Após o esclarecimento de dúvidas iniciaremos a exploração de um exemplo, em que será projetado o slide 1, onde podemos inicialmente observar uma reta num referencial cartesiano da qual os alunos apenas conhecem dois pontos. Em primeiro lugar será colocada a questão:

   "Será que esta reta é a representação de uma função linear?"

   Nesta altura os alunos devem já conseguir compreender que a representação gráfica de uma função linear contém a origem do referencial o que não acontece com o exemplo que estarão a analisar. Depois será relembrada com os alunos a forma como aprenderam a determinar o declive de uma função linear (através da razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto), então será colocada a seguinte questão:

   "Então e neste exemplo que dados tenho acerca da reta?"

   Vou pedir aos alunos que pensem que o seu outro ponto da função linear é a origem do referencial e transpondo para o nosso exemplo, utilizaremos os dois pontos que temos, onde vamos imaginar que podemos deslocar a origem do referencial para o ponto mais próximo deste e aplicar o mesmo processo, mas com os pontos a reta que temos.

   Assim determinaremos o declive da função afim. Serão então colocadas as questões:

   "Já temos a equação da reta?"

   "Como definimos uma função afim?"

   Aqui os alunos irão identificar que ainda nos falta a ordenada na origem. Nesta fase não só tentarei que os alunos compreendam melhor a noção intuitiva de ordenada na origem através da interpretação do significado de ordenada na origem, para que os alunos compreendam que por vezes podemos determiná-la apenas por observação do gráfico, mas depois será ainda mostrado aos alunos como a podemos determinar através da resolução de uma equação do primeiro grau, em que utilizamos 1 ponto da reta para substituir no valor da abcissa e da ordenada e passamos a ter uma equação em que a nossa incógnita é b, ou seja, exatamente o que queremos descobrir. Assim determinaremos a equação da reta que representa a função afim apresentada. Será ainda feita uma sistematização das conclusões retiradas do slide 1, no slide 2, onde os alunos poderão contatar com a notação usada num caso geral.

   É provável que os alunos possam estranhar a denominação de dois pontos quaisquer de uma reta por (x_A, y_A) e (x_B, y_B), pois os alunos conhecem as coordenadas de um ponto como (x, y), mas esta dificuldade pode facilmente ser superada explicando que como estamos a falar de dois pontos temos de ter uma forma de os distinguir e daí o índice A e B em cada um dos pontos.

3. Realização de uma exploração pelos alunos com a calculadora gráfica acerca da ordenada na origem do gráfico de uma função afim. (15 minutos)

   Nesta fase será realizada uma exploração dos alunos acerca do efeito de diferentes ordenadas na origem na representação gráfica da função afim. Para tal terei no meu computador software que me permitirá projetar uma calculadora gráfica TI-83, igual à que será dada a cada par de alunos, e com o qual irei ensinar os alunos a introduzir as equações das retas e a executar os gráficos para que os possam desenhar numa folha quadriculada que lhes será fornecida por mim. Pedirei aos alunos para que, em cada reta desenhada na sua folha, assinalem a ordenada na origem e as suas conclusões. Apenas realizarei com os alunos 1 exemplo de ordenada na origem positiva e outra negativa. Após a explicação acerca do funcionamento das máquinas, os alunos trabalharão de forma autónoma em pares e poderei circular entre eles esclarecendo possíveis dúvidas, fornecendo pistas para que os alunos consigam chegar às conclusões pretendidas e tirando notas para possíveis pontos a discutir ou a questionar na discussão coletiva.

4. Discussão e sistematização das conclusões acerca da exploração com ajuda do software. (15 minutos)
   Discutiremos em conjunto, em primeiro lugar, o efeito da ordenada na origem positiva e em que zona vai estar a interseção da reta com o eixo dos yy se na parte onde as imagens são positivas ou negativas? O mesmo processo será seguido para a ordenada na origem negativa e as conclusões a retirar. Finalmente será analisado o que acontece quando a ordenada na origem é zero, sendo aqui evidenciado aos alunos que a função afim "contém" a função linear, sendo esta última um caso particular da função afim.
   Depois desta análise serão sistematizadas as conclusões discutidas com a turma, colocadas já no slide 4, onde estão presentes um exemplo de cada, um com ordenada na origem negativa, outro com ordenada na origem positiva e o caso em que é nula.

5. Continuação da resolução da tarefa 2, iniciada na aula anterior. (20 minutos)
   Será retomada a tarefa2, onde os alunos irão trabalhar autonomamente, em pares. Como os alunos já realizaram os exercícios 1 e 2, na aula anterior, este momento de trabalho autónomo dedica-se então a terminar esta tarefa, tendo de realizar os exercícios 3, 4, 5 e 6. O professor circulará então pela turma, acompanhando o trabalho dos alunos, esclarecendo dúvidas, fornecendo pistas e selecionando as resoluções para a discussão.

6. Discussão e resolução da tarefa 2 em conjunto com a turma. (15 minutos)
   Os alunos precisarão de tempo, pois têm de desenhar os gráficos das funções, para facilitar esta tarefa terei um slide já preparado para ajudar os alunos a desenharem as retas no quadro. Esta grelha será projetada tanto para o exercício 3 quanto para o exercício 5. No exercício 5 será ainda projetada a tabela no quadro para os alunos a preencherem. Como os alunos já realizaram os exercícios 1 e 2, na aula anterior, este momento de trabalho autónomo dedica-se então a terminar esta tarefa, tendo de realizar os exercícios 3, 4, 5 e 6. No decorrer da discussão o professor terá o cuidado de chamar à atenção dos alunos para a diferença entre a representação gráfica de uma função linear e de uma função afim. A discussão será gerida pelo professor de modo a que os alunos exponham as suas dúvidas, conjeturas e conclusões.

7. Trabalho de casa: Ficha de tpc_3.

Avaliação:
A avaliação será realizada, através de:

- Observação direta;
- Depois da aula será feito pelo professor um breve registo da participação dos alunos.

Dificuldades Previstas:

Nesta aula poderão surgir algumas dificuldades relativamente à determinação do declive de uma reta não vertical dados dois pontos distintos e ainda na determinação da ordenada na origem. Os alunos podem não identificar que para determinar a ordenada na origem tendo o declive apenas têm de substituir x e y, utilizando um ponto da reta, na equação da reta e resolver a equação em ordem a b.

Podem, também, surgir dificuldades em identificar o termo independente na expressão algébrica de uma função afim com a ordenada na origem. Relativamente à representação gráfica os alunos podem ter algumas dificuldades em compreender que se a ordenada na origem é positiva a reta interseta o eixo do yy em ordenadas positivas, se é negativa a reta interseta o eixo do yy em ordenadas negativas e que quando a ordenada na origem é nula estamos em presença de um caso particular em que a função passa a uma função linear, pois a ordenada na origem é nula. São de ter em consideração ainda outras dificuldades como confundir as abcissas e as ordenadas, marcar pontos no referencial cartesiano ou ainda identificar o declive e a ordenada na origem de uma função afim ou linear dada a expressão algébrica. Relativamente à representação gráfica poderão ainda surgir dificuldades em identificar em que quadrantes se situa a reta quando declive é positivo ou quando o declive é negativo.

Os alunos poderão ainda ter dúvidas na construção do gráfico de funções como lhes é pedido na tarefa 2, na questão 3 ou ainda na questão 5, onde os dados da questão mostram uma representação gráfica da reta e dois pontos distintos da mesma para que possam determinar a sua expressão algébrica. Outra situação que poderá trazer dificuldades aos alunos prende-se com a última questão em que os alunos devem escrever a expressão algébrica da função linear que passa pelo ponto dado.

Anexo V – Plano de aula 5 – 27 de Abril de 2015

Plano de Aula (27 de Abril de 2015)
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.
Ano letivo 2014/2015
Docente: Helena Fonseca
Turma: 8 º A, 24 alunos

Domínio/Conteúdos:
Funções: Equação de uma reta não vertical e gráfico de uma função linear ou afim.
Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical.
Determinação de uma reta definida por dois pontos.
Problemas envolvendo equações de retas em contextos diversos.

Conhecimentos prévios:
- Noção de equação.
- Resolução de equações.
- Noção de referencial ortogonal monométrico.
- Noção de função e terminologias associadas.
- Noção de função linear e função afim.
- Definição geométrica de reta.
- Noção e determinação de declive de uma reta.
- Noção de ordenada na origem e como proceder para a determinar.

Objetivos:
Esta aula tem por objetivo dar a oportunidade aos alunos de reconhecerem que as retas não verticais são gráficos de funções afins e que se podem representar pela equação $y = ax + b$, e identificar a por "declive" da reta e b por "ordenada na origem". Será ainda muito importante que os alunos compreendam como determinar o declive de uma reta não vertical dados dois pontos distintos. É esperado ainda que os alunos compreendam a relação entre o declive de uma reta, representada por uma função afim e o efeito da variação deste parâmetro na sua representação gráfica e ainda na sua representação algébrica. Pretende-se ainda que os alunos compreendam se um ponto pertence ou não a uma determinada reta. Espera-se que os alunos compreendam que dependendo da forma como os dados lhes são fornecidos a forma de determinar o declive de uma reta não vertical se mantém e que a representação algébrica de uma função é também a equação da reta.

O problema que se encontra na terceira questão, pretende dar aos alunos a noção de que podemos usar as funções em questões do seu quotidiano e que apesar de exigirem abstração por parte dos alunos podemos modelar problemas através destas. Em situações tão simples como percorrer distâncias, por exemplo. Este problema tem como objetivo trabalhar a interpretação de resultados, de dados fornecidos e ainda, que os alunos compreendam, que dados são importantes para resolver cada questão.

Recursos:
Ficha de trabalho de casa.
Tarefa 2.

Tarefa 3.

Capacidades Transversais:

Estabelecimento de conexões matemáticas.

Será dada a oportunidade aos alunos de estabelecerem conexões matemáticas através de problemas num determinado contexto em que os alunos terão de recorrer aos conhecimentos acerca de funções lineares e afins. Os alunos precisarão assim usar os seus conhecimentos acerca da construção da expressão algébrica, tanto em problemas com contexto como em problemas sem contexto. Os alunos terão ainda de interpretar os resultados obtidos à luz do contexto do problema o que lhes permitirá fazer conexões com a sua realidade e ainda com matérias lecionadas noutros anos de escolaridade. No problema da questão 3) são exploradas situações do quotidiano dos alunos e trabalhados os conteúdos lecionados nas aulas anteriores. Já nas restantes questões os alunos terão contextos puramente matemáticos para que possam compreender melhor a aplicação dos conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Raciocínio matemático.

Nesta aula os alunos terão oportunidade de formular as suas respostas e argumentar de modo a fundamentá-las. Os alunos terão ainda a possibilidade de deduzir equações de retas e raciocinar matematicamente de acordo com os processos adquiridos nas últimas aulas para que o consigam realizar. Uma parte importante desta aula prende-se com a tentativa de que os alunos compreendam as ligações entre a expressão algébrica, a representação gráfica e a relação que existe entre estes dois tipos de representação de uma mesma função.

Comunicação matemática.

A comunicação matemática estará presente na argumentação das ideias e dos conceitos matemáticos necessários para a justificação das respostas na resolução das tarefas. Nesta aula, a tarefa proposta contém dois problemas que exigirão dos alunos uma boa interpretação do problema, uma transição entre a linguagem corrente e a linguagem matemática, pois será da interpretação do problema que os alunos construirão a representação algébrica da função para que possam responder de forma coerente às questões colocadas. Os alunos, além de responderem as estas questões, terão ainda de interpretar no contexto do problema, pois em cada uma das questões os dados são fornecidos sempre de acordo com o contexto escolhido de modo a que o aluno consiga transpor estas questões matemáticas para a realidade. Será, também, parte integrante das discussões em grupo e em pares, pois os alunos terão de exprimir os processos matemáticos de forma escrita e oral, usando notação e vocabulário adequados. Os alunos poderão exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando notação, simbologia e vocabulário próprios.

Resolução de problemas.

Nesta aula os alunos terão a oportunidade de se debruçar sobre problemas com contexto de modo a compreenderem que os conhecimentos matemáticos, que têm vindo a falar nas últimas aulas, têm lugar na sua vida ativa e que, muitas vezes, se servem destes sem que os relacionem com a matemática. Os alunos poderão esclarecer alguns conceitos que ainda não estejam bem interiorizados e ainda compreender como os podem aplicar e em que situações, mas sempre numa base argumentativa, onde têm de fazer a ponte entre o contexto do problema e os conceitos matemáticos de que se vão servir para os resolver. Esta tarefa exige, também, ao alunos a escolha de algumas estratégias para resolver as questões, permitindo por vezes a escolha entre uma abordagem algébrica ou uma abordagem gráfica, como é o caso da questão 1.2), em que os alunos podem substituir os pontos na expressão algébrica e retirar as conclusões ou desenhar a representação gráfica da função h e marcar os pontos fornecidos no mesmo referencial tentando ver se estes coincidem com o gráfico da função.

Nesta tarefa tenta-se, também, que os alunos tenham contacto com uma grande diversidade de abordagens ao nível das questões que lhe podem ser colocadas.

Organização e Formas de Trabalho:
A aula terá a seguinte estrutura: existirão momentos de trabalho autónomo a pares, discussões em grande grupo (turma) e sistematização das aprendizagens feita em conjunto com o professor e a turma.

Desenvolvimento da Aula:

1. Realização de esclarecimento de dúvidas e da correção do trabalho de casa. (20 minutos)
   A aula terá início com a correção do trabalho de casa pelos alunos no quadro, para esclarecer possíveis dúvidas.
2. Conclusão da discussão iniciada na aula anterior. (15 minutos)
   Será ainda retomada a discussão por concluir da tarefa 2, onde retomaremos o exercício 5, onde os alunos devem determinar a equação de uma reta, que representa uma função afim dados dois pontos, e finalmente o exercício 6, onde os alunos devem determinar as equações de retas que representam funções lineares, dado um ponto.
3. Realização das questões 1, 2 e 3 da tarefa 3. (25 minutos)
   Nesta fase os alunos irão trabalhar autonomamente, em pares. Este momento de trabalho autónomo dedica-se à aplicação dos conceitos adquiridos pelos alunos nas últimas aulas, de modo a que haja uma consolidação das suas aprendizagens. O professor circulará então pela turma, acompanhando o trabalho dos alunos, esclarecendo dúvidas, fornecendo pistas e selecionando as resoluções para a discussão. A terceira questão terá um grau de exigência mais elevado, pois trata-se de um problema com contexto onde os alunos têm de usar os seus conhecimentos acerca de funções lineares e interpretá-los à luz do problema.

4. Discussão e sistematização das conclusões acerca das questões 1, 2 e 3 da tarefa 3. (20 minutos)
   Discutiremos em conjunto, os resultados obtidos pelos alunos, começando um aluno por corrigir as alíneas 1.1 e 1.2, e outro para as duas subalíneas da questão 1.3, esta decisão prende-se com o facto de não se perder tanto tempo nas transições entre alunos no quadro, mas será alterada caso o professor ache oportuno de acordo com algumas das resoluções que observar. A segunda questão funcionará nos mesmos moldes, pedindo a um aluno que realize as duas subalíneas das 3 alíneas da questão. Estas decisões destinam-se a que haja mais tempo disponível para a terceira questão, pois trata-se de um problema que poderá levantar mais dúvidas aos alunos e exigir algum tempo para que as conexões entre as noções matemáticas e a aplicação em problemas com contexto fiquem esclarecidas.

5. Continuação da resolução da tarefa 3. (20 minutos)
   Será retomada a tarefa3, onde os alunos irão trabalhar autonomamente, em pares. Este momento de trabalho autónomo dedica-se então a terminar a

tarefa 3, tendo de realizar os exercícios 4, 5 e 6. O professor circulará então pela turma, acompanhando o trabalho dos alunos, esclarecendo dúvidas, fornecendo pistas e selecionando as resoluções para a discussão. Nestas ultimam questões os alunos terão, também, de abordar um problema com contexto, mas agora no âmbito da função afim e ainda conhecimentos de anos anteriores como o cálculo de percentagens. Esta questão da percentagem prevê-se mais problemática para os alunos, mas será acompanhada atentamente pelo professor e serão colocadas questões aos alunos e, caso seja necessário, será feito um esclarecimento para toda a turma. Em primeiro lugar perguntando "O que vai sofrer um aumento de 5%, o custo total? Ou o Custo de montagem?", "Como posso saber, quanto é o aumento em euros?", "Então o que vou alterar na minha expressão algébrica inicial?".

6. Trabalho de casa: exercícios 1 e 2 da página 116 e 3 da página 106.

Avaliação:

A avaliação será realizada, através de:

- Observação direta;
- Depois da aula será feito pelo professor um breve registo da participação dos alunos.
-

Dificuldades Previstas:

Nesta aula poderão surgir algumas dificuldades como a determinação do declive de uma função linear, qua apenas foi trabalhada na aula anterior, sendo ainda muito recente para os alunos este processo.

Poderão também surgir dificuldades na interpretação dos problemas, pois os alunos terão de interpretar corretamente os problemas e conseguir transformar a linguagem corrente presente no problema em linguagem matemática. Além disso, os alunos terão de identificar que nos diferentes problemas estamos a trabalhar noções matemáticas, como a função linear e a função afim e mobilizar os seus conhecimentos para responder às questões colocadas, o que ainda lhes exigirá a compreensão do que precisam de aplicar em cada questão para conseguir responder. Outra dificuldade será a integração dos resultados matemáticos obtidos pelo aluno no contexto e a compreensão do seu significado para justificar as suas respostas. Nas restantes questões da tarefa podem ainda surgir dificuldades, mas agora de outro nível. A primeira questão poderá levantar algumas dificuldades ao nível de os alunos não se recordarem da noção de forma canónica ou possíveis dificuldades a nível da manipulação das expressões para proceder à simplificação. Na segunda alínea da mesma questão os alunos podem ter dúvidas acerca do processo a usar para verificar se os pontos pertencem ou não à reta, pois podem fazê-lo de forma algébrica ou gráfica e, por fim, não será ainda fácil para os alunos determinar o ponto de uma dada função que tem determinada abcissa ou ordenada. Na segunda questão tenta-se trabalhar as representações gráficas, podendo trazer problemas aos alunos que não se recordem que uma função afim linear passa sempre na origem do referencial ou, ainda, a alunos que não se recordem que para determinar o declive de uma função linear basta fazer a razão entre a ordenada e a abcissa de um ponto qualquer da função. A segunda questão pretende ainda, interiorizar nos alunos, a necessidade da determinação do declive para a determinação da expressão algébrica de uma função. Na terceira questão, é feita uma abordagem à função afim no contexto de um problema, as dificuldades previstas nesta questão devem agora prender-se mais com a relação entre a distância percorrida num dado tempo. Esta relação tem de ser compreendida pelos alunos e associada com a função dada no problema. Outra dificuldade poderá surgir na interpretação dos resultados obtidos e a explicação do seu significado no contexto do problema, Aqui os alunos terão de compreender que é através dos valores atribuídos à variável t que obterão as diferentes distâncias percorridas pelo Miguel. A questão 3.3 trabalha ainda a conversão de horas em minutos, o que poderá trazer algumas dificuldades se os alunos não se recordarem que a variável t se encontra em minutos e não em horas. Os alunos terão então de calcular o $d(60)$ e não o $d(1)$, para saber a distância a ser percorrida pelo Miguel para comprar o esquadro. A questão 3.4), leva os alunos no sentido inverso, o que poderá ser complicado para os alunos caso não compreendam que nesta alínea estamos a realizar o processo inverso, em que têm a distância percorrida e terão de determinar o tempo que o Miguel leva a percorrer essa distância. Outra dificuldade pode prender-se com a resolução desta equação do primeiro grau, que os alunos têm trabalhado nas aulas, mas que para alguns ainda não é simples. A última alínea da questão 3.4) é apenas uma interpretação dos dados já determinados na alínea anterior em conjunto com o dado fornecido no enunciado acerca da hora a que o Miguel saiu de casa. Este problema pode trazer dificuldades aos alunos no sentido do reconhecimento dos dados do problema e quais usar em cada alínea. Este também é um aspeto que se pretende trabalhar nesta questão, que dados temos e quando os devemos usar, o que não é fácil para alunos deste nível.

A questão 4, tenta fazer uma abordagem semelhante à da questão 2, mas agora relativa à função afim, onde os alunos podem ter alguns problemas se não souberem determinar o declive dados dois pontos, ou ainda se não compreenderem que precisam de substituir um ponto da reta na equação da mesma para que consigam determinar o declive da reta. As questões 1, 2 e 4 tentam dar aos alunos o maior leque possível de abordagens com que podem ser confrontados. No caso da questão 5, pretende-se que os alunos a partir da representação gráfica de três retas, sejam capazes de construir as suas equações. Neste caso temos uma função constante, uma função linear e uma função afim. Aqui também poderão existir dificuldades como os alunos não compreenderem que precisam de pontos de cada uma das respetivas retas para que possam construir as equações das retas. Outra dificuldade é que os alunos têm de saber à partida o tipo de equação a construir para cada uma das retas e identificarem quando têm de determinar apenas o declive, quando têm de determinar o declive e a ordenada na origem ou quando têm apenas de identificar o termo constante.

Anexo VI – Plano de aula 6 – 29 de Abril de 2015

Plano de Aula (29 de Abril de 2015)
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão.
Ano letivo 2014/2015
Docente: Helena Fonseca
Turma: 8 º A, 24 alunos

Domínio/Conteúdos:
Funções: Problemas envolvendo equações de retas em contextos diversos.
Relação entre declive e paralelismo.

Conhecimentos prévios:
- Noção de equação.
- Resolução de equações.
- Noção de referencial ortogonal monométrico.
- Noção de função e terminologias associadas.
- Noção de função linear e função afim.
- Definição geométrica de reta.
- Noção e determinação de declive de uma reta.
- Noção de ordenada na origem e como proceder para a determinar.
- Noção de vetor.
- Noção de isometria.
- Noção de translação.
- Operações com vetores.

Objetivos:
Esta aula tem por objetivo dar a oportunidade aos alunos de em primeiro lugar discutirem os resultados obtidos, nas questões 4, 5 e 6 da tarefa 3 iniciada na aula anterior. Este momento será importante para que haja esclarecimento de possíveis dúvidas acerca dos diferentes tipos de abordagem que podem surgir, para a determinação da equação de uma reta que representa uma função afim, bem como uma consolidação do processo a seguir para o realizar. Nesta tarefa, são ainda abordados, a construção de gráficos que representam retas de funções afins e ainda a construção de equações de retas partindo da sua representação gráfica. Por fim, será discutido o problema que se encontra na questão 6, onde os alunos são levados a realizar conexões entre situações da vida real e os conhecimentos matemáticos acerca de funções, que trabalharam até ao momento.

Os alunos terão a oportunidade de compreender como podemos dada uma reta, obter uma outra paralela a esta, através de uma translação da primeira, por um vetor, definindo pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0{,}0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$. Este processo será realizado através da exploração de um exemplo, onde vamos construir a e analisar o processo, passo a passo, para que os alunos o possam compreender de modo mais profundo e serão então retiradas as conclusões de acordo com a representação gráfica das funções consideradas e depois confrontadas com a análise da sua expressão algébrica. Deste modo os alunos conseguirão concluir e compreender que a relação entre o declive e o paralelismo de retas. Sendo reforçado no exemplo que duas retas paralelas têm o mesmo declive, através da comparação do declive, sendo ainda dito aos alunos que se duas retas têm o mesmo declive então são paralelas. Nesta altura surgem ainda alguns exemplos, no slide 6) de modo a que os alunos possam visualizar a situação.

Recursos:
Tarefa 3.
Computador.

Capacidades Transversais:
<u>Estabelecimento de conexões matemáticas.</u>
Será dada a oportunidade, aos alunos de estabelecerem conexões matemáticas através de problemas num determinado contexto, em que os alunos terão de recorrer aos conhecimentos acerca afins. Os alunos precisarão assim usar os seus conhecimentos acerca da construção da expressão algébrica, tanto em problemas com contexto como em problemas sem contexto. Terão ainda de interpretar os resultados obtidos à luz do contexto do problema o que lhes permitirá fazer conexões com a sua realidade e ainda com matérias lecionadas noutros anos de escolaridade como é o caso das percentagens que se encontra na questão 6.2). Nas restantes questões os alunos terão contextos puramente matemáticos para que possam compreender melhor a aplicação dos conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores. Esta aula apela a conexões com o domínio da geometria e medida, pois os alunos terão de saber o que são retas paralelas. Os alunos irão aprender ainda a relação entre duas retas serem paralelas e o declive das mesmas.
<u>Raciocínio matemático.</u>
Nesta aula os alunos terão oportunidade de formular as suas respostas e argumentar de modo a fundamentá-las. Os alunos terão ainda a possibilidade de deduzir equações de retas e raciocinar matematicamente de acordo com os processos adquiridos nas últimas aulas para que o consigam realizar. Esta aula, os alunos terão ainda a oportunidade de raciocinarem geometricamente, sendo necessário compreenderem a relação de paralelismo entre duas retas e as suas implicações na sua representação algébrica. Os alunos farão ainda a exploração de um exemplo, onde determinam o declive de ambas as retas, concluindo que se trata do mesmo declive. Este raciocínio pode ajudar os alunos a compreender melhor o resultado que lhes será introduzido.
<u>Comunicação matemática.</u>
A comunicação matemática estará presente na argumentação das ideias e dos conceitos matemáticos necessários para a justificação das respostas na resolução das tarefas. Será, também, parte integrante das discussões em grupo e em pares, pois os alunos terão de exprimir os processos matemáticos de forma escrita e oral, usando notação e vocabulário adequados. Os alunos poderão exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando notação, simbologia e vocabulário próprios.
<u>Resolução de problemas.</u>
Esta aula ainda dará aos alunos a oportunidade de contatar, mais uma vez com problemas com contexto, em particular a questão 6 da tarefa 3. Este problema dará aos alunos a oportunidade de interpretar os resultados obtidos matematicamente e traduzi-lo em linguagem natural. Neste problema, os alunos terão ainda de interpretar informações do enunciado, de modo a encontrarem a solução para cada alínea. Na segunda parte da aula a resolução de problemas está presente, pois os alunos terão de compreender as alterações dos dados que serão introduzidas no exemplo, para compreenderem a dedução que os levará ao resultado que relaciona o declive e o paralelismo entre duas retas.

Organização e Formas de Trabalho:
A aula terá a seguinte estrutura: existirão momentos de trabalho autónomo a pares, discussões em grande grupo (turma) e sistematização das aprendizagens feita em conjunto com o professor e a turma.

Desenvolvimento da Aula:

1. Realização de esclarecimento de dúvidas e correção do trabalho de casa do manual. (15 minutos)
   A aula terá início com a correção do trabalho de casa por um aluno no quadro, para esclarecer possíveis dúvidas.
2. Discussão e resolução da tarefa 3 em conjunto com a turma. (25 minutos)
   Pretende-se que os alunos mostrem como resolveram e, caso seja necessário, consigam identificar possíveis erros na resolução dos colegas e fazer sugestões de correção dos erros.
   Este momento será muito importante, pois os alunos estarão a trabalhar pela primeira vez a aplicação dos seus conhecimentos a problemas com contexto. Estes vão exigir interpretação e conexões entre os seus conhecimentos de funções e a realidade. Será interessante compreender se os conseguem compreender os dados do problema e quando os devem usar.

3. Introdução da relação entre o declive de uma reta e o paralelismo. (30 minutos).
   Este será um momento de introdução desta relação e como tal, será realizado com o apoio do PowerPoint construído para este efeito. Começaremos por analisar um exemplo, que nos permitirá retirar as conclusões desejadas. Assim no slide 1, começamos por considerar no referencial ortogonal monométrico o segmento definido pelos pontos $O(0,0)$, $A(2,1)$ e o vetor $\overrightarrow{OB}$ de coordenadas $(0,3)$. Solicita-se então a translação deste segmento $[OA]$ pelo vetor $\overrightarrow{OB}$. Neste momento será recordada a noção de translação, pois os alunos já a conhecem.
   Será dito aos alunos que apesar de estarem dois vetores no slide 1, ambos representam o vetor $\overrightarrow{OB}$, mas aplicados em pontos diferentes. Pois se observarmos, ambos os vetor têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.
   Aqui devem ser colocadas algumas questões para perceber se os alunos se recordam como podemos efetuar a transação do segmento. Será ainda importante recordar os alunos que a soma de um ponto com um vetor é um ponto.
   “ Quando aplicamos o vetor $\overrightarrow{OB}$ ao ponto O, o que obtemos? E no ponto A?”
   “Que ponto obtemos então, pela translação do ponto O pelo vetor $\overrightarrow{OB}$? E do ponto A?”
   “Como podemos chamar, ao segmento que obtemos por translação do segmento $[OA]$?”
   No slide 2, passamos então a considerar, as retas que contêm esses segmentos, de modo a conseguirmos perceber melhor a relação entre as

funções que contêm os segmentos e a soma de um ponto com um vetor, neste caso será importante reforçar que este não é um ponto qualquer, mas sim um ponto do segmento $[OA]$ que por sua vez está contido na função f, que representa uma reta que passa na origem do referencial. Será ainda evidenciado que B é o ponto que resulta da translação do ponto O pelo vetor $\overrightarrow{OB}$.

Será importante explorar com os alunos de que tipo são os pontos da função f, para que possamos pensar nas ordenadas desses pontos, que corresponderão às imagens da função. Assim e chegados a este ponto, deve será importante evidências que a função g não é mais do que a soma das imagens de f com o vetor $\overrightarrow{OB}$, mas as imagens de f, no referencial têm de ser representadas por pontos, então a soma de um ponto com um vetor é um ponto, logo este pontos que resultam da soma anterior serão os pontos da função g.

No slide 3, temos a sistematização destas conclusões que serão lidas pelos alunos e que no slide 4, fará a ponte entre a representação gráfica utilizada desde o primeiro slide e as funções lineares e afins.

No slide 5, chegaremos então à desejada constatação acerca do paralelismo destas duas retas e da comparação das suas expressões algébricas. Começado por associar a expressão algébrica de uma função linear qualquer e aplicando-lhe a expressão algébrica da funçãof e o mesmo raciocínio é feito para a função afim, mas agora para definir a função g, mas agora tendo em conta que esta se pode definir à custa da função f. Chegaremos assim a ambas a expressões algébricas ou equações das retas, onde poderemos constatar, que ambas têm o mesmo declive, e assim concluir, com a leitura por um aluno que "Se duas retas não verticais são paralelas, então têm o mesmo declive.

Se duas retas não verticais têm o mesmo declive, então são paralelas."

No slide 6, poderemos então retirar a conclusão mais geral e desejada, que será lida por um aluno, onde é dito que "Duas retas não verticais são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive." Depois serão ainda analisados exemplos de retas paralelas com o mesmo declive em que a única coisa que se modifica será a ordenada na origem, estão presentes exemplos de declive positivo, negativo e nulo, para que os alunos possam compreender que qualquer que seja o tipo de reto considerado, podemos sempre ter uma reta paralela. Nesta altura o professor aproveitará para construir através de alguma discussão com os alunos as equações de algumas retas presentes nos exemplos.

4. Realização de trabalho autónomo em pares pelos alunos de três exercícios. (20 minutos)

   Nesta fase os alunos realizarão apenas os exercícios 3, 7 e 8 da página 106 do manual, numa folha à parte para entregar ao professor. Nesta fase o professor circulará entre os alunos, esclarecendo possíveis dúvidas, fornecendo pistas para que os alunos consigam chegar às conclusões pretendidas tirando notas para possíveis pontos a discutir ou a questionar na discussão coletiva. Os exercícios serão discutidos no início da próxima aula.

5. Trabalho de casa: exercícios: 9 da página 107 e exercício 4 da página 116.

Avaliação:
A avaliação será realizada, através de:

- Observação direta;
- Depois da aula será feito pelo professor um breve registo da participação dos alunos.

Dificuldades Previstas:
Nesta aula poderão surgir dificuldades com a relação entre a translação de um segmento de reta e a passagem para as funções, como uma reta que contém o segmento que sofre a translação. Se os alunos não se recordarem o que é a translação e que esta é uma isometria e que uma isometria mantem as distancias. Esta aula poderá trazer dificuldades ao nível da visualização, pois será preciso que o aluno se abstrai-a do ponto de partida para que possamos chegar à relação com as funções, mas esta exigência será ainda maior, pois os alunos terão de realizar as conexões entre domínios distintos, mas que na verdade se cruzam e se completam como neste exemplo. Poderá ainda ser difícil para os alunos compreenderem o modo como definimos a funçãog à custa da função f, apesar de ser apenas uma substituição, para os alunos o acto de substituir não é simples, como já foi observado em aulas anteriores.

Anexo VII – Tarefa 1: Revisões acerca de funções

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves **8.º Ano**

Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/ ___/ ___

Tarefa 1: Revisões acerca de funções.

1) Indica as figuras onde estão correspondências que representam funções e explica a tua resposta.

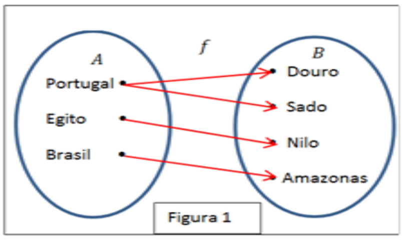


Figura 1

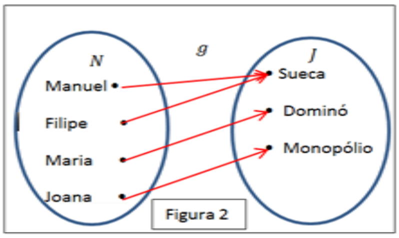


Figura 2

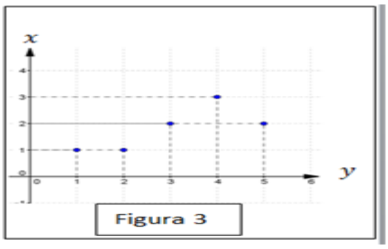


Figura 3

2) Na figura 4, estão representadas as funções f e g por um diagrama de setas e por uma tabela, respetivamente:

A função g associa, a cada um dos cinco alunos que frequentam o 8.ºano, o nível obtido a matemática no 1.º período.

x	Ana	Gil	Rui	Sara	José
$g(x)$	3	3	4	2	3

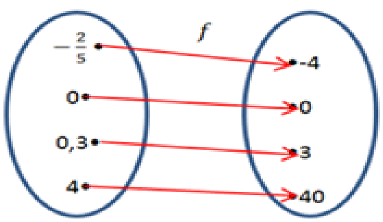


Figura 4

a) Explica que a correspondência dada na tabela representa uma função.

b) Indica o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada da função f.

c) Em relação à função f, determina $f(0)$, $f(0{,}3)$ e o objeto cuja imagem por f é -4.

d) Relativamente agora à função g, indica a imagem de Rui.

e) As funções f e g são numéricas de variável numérica? Justifica a tua resposta.

f) Representa a função f algebricamente e a função g por um diagrama de setas.

3) Considera as funções dadas pelas seguintes expressões algébricas:

$$f(x) = -3; \quad g(x) = 2x; \quad h(x) = -x + 4; \qquad i(x) = \frac{1}{2}(-8 + 5x)$$

a) Escreve a expressão algébrica de $i(x)$ na forma canónica.

b) Indica quais das funções dadas são funções lineares e quais são funções afins e explica a tua resposta.

c) Indica o coeficiente de x e o termo independente, em cada uma das expressões algébricas de $h(x)$ e $g(x)$.

d)Calcula:

$f(x) = -3;$ $\quad g(x) = 2x;$ $\quad h(x) = -x + 4;$ $\quad i(x) = \frac{1}{2}(-8 + 5x)$

$f(8)$ $\quad f(-100)$ $\quad g(-3)$

$g(-\frac{7}{4})$ $\quad g(0)$ $\quad h(-0,1)$

4) Constrói uma tabela e um diagrama de setas que represente uma função e uma tabela e um diagrama de setas que não represente uma função.

Anexo VIII – Tarefa 2

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves **8.º Ano**

Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ **N.º:** ___ **Turma:** ___ | **Data:** ___/ ___/ ___

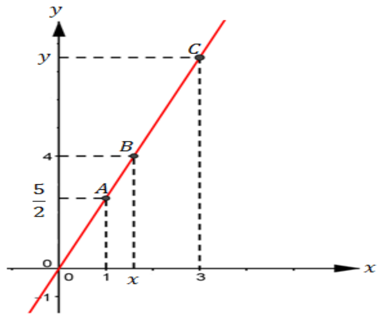
Tarefa 2:

1) No referencial da figura está representada uma reta que passa pela origem do referencial e pelo ponto $A(1,\frac{5}{2})$.

Os pontos B e C pertencem à reta. A ordenada de B é 4 e a abcissa de C é 3.

Determina:

1.1) A abcissa do ponto $B(x,4)$.

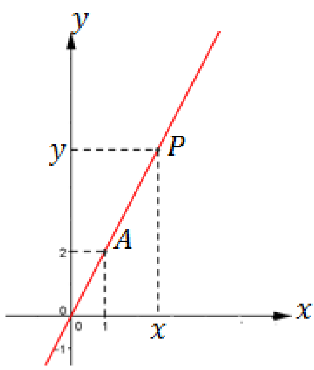


1.2) A ordenada do ponto $C(3,y)$.

2) No referencial da figura está representada uma reta que passa pela origem do referencial e pelo ponto $A(1,2)$.

Seja $P(x,y)$ um ponto do 1.º quadrante que pertence à reta AO.

Mostra que $y = 2x$, recorrendo ao teorema de Tales



3)Considera as funções afins f, g e h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que:

$f(x) = x + 1$ $\qquad$ $g(x) = -x + 2$ $\qquad$ $h(x) = 3x - 1$

3.1) Representa as funções graficamente.

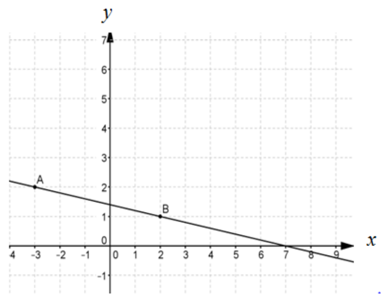
3.2) Indica o declive e a ordenada na origem de cada uma das funções.

4) Considera as funções i, j, k e l. Estabelece a correspondência entre as funções e os respetivos quadrantes em que se encontram os seus gráficos, sabendo que:

- $i(x) = -x$
- $j(x) = 3x$
- $k(x) = 0.5x$
- $l(x) = -2x$

5) Na figura, está representada a reta AB, sendo $A(-3,2)$ e $B(2,1)$.

5.1) Determina a equação reta AB.



6) Determina a expressão analítica da função linear cujo gráfico passa pelo ponto:

6.1) $(-2,-10)$

6.2) $(-5,1)$

6.3) $(1,-5)$

Anexo IX – Tarefa 3

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves **8.º Ano**

Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___ | Data: ___/ ___/ ___

Tarefa 3:

1) Considera as funções h e j de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por

$$h(x) = 3x - 2(5 - x) + 10 \text{ e } j(x) = 5 - \frac{3x}{2} - (x + 1).$$

1.1) Representa na forma canónica as funções h e j.

1.2) Verifica se os pontos de coordenadas $\left(-\frac{3}{5}, -3\right)$, $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{2}\right)$ e pertencem ao gráfico de h.

1.3) Determina o ponto do gráfico de j que tem:

1.3.1) abcissa 1;

1.3.2) ordenada 3.

2) Seja g uma função linear cujo gráfico é representado pela reta r num referencial ortogonal monométrico.

2.1) Determina a equação de r e representa a reta num referencial ortogonal monométrico se:

2.1.1) $g(1) = 2$

2.1.2) $g(-2) = 5$

2.2) Calcula o declive r se:

2.2.1) o ponto $(1,4)$ pertence ao gráfico de g;

2.2.2) o ponto $(1, -3)$ pertence ao gráfico de g;

2.3) Determina uma expressão algébrica de g, se:

2.3.1) a reta r é definida pela equação $y = -6x$;

2.3.2) a reta r passa no ponto $(1,5)$;

3) O Miguel vai todos os dias para a escola. Sabe-se que a distância entre a casa do Miguel e a escola é de 1260 metros.
A distância d, em metros, efetuada pelo Miguel t minutos após ter saído de casa é dada pela expressão $d(t) = 84t$.

3.1) Quantos metros foram percorridos pelo Miguel ao fim de cinco minutos?

3.2) Calcula $d(12)$ e explica o seu significado no contexto do problema.

3.3) O Miguel precisa de comprar um esquadro na papelaria mais próxima da escola, para usar na aula de matemática. A papelaria fica a uma hora de casa do Miguel. Que distância terá de percorrer o Miguel para comprar o esquadro?

3.4) O Miguel saiu de casa às $9\ horas\ e\ 52minutos$.

3.4.1) Quanto tempo levou a chegar à escola?

3.4.2) A que horas chegou à escola?

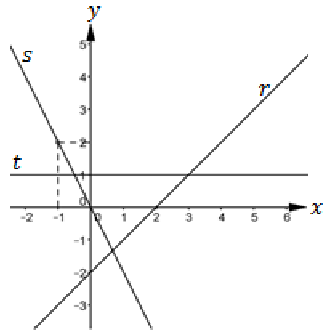
4) Escreve a equação e representa num referencial ortogonal monométrico a reta r que:

4.1) Tem declive 3 e ordenada na origem -5.

4.2) Passa no ponto $(-1,3)$ e tem declive 2.

4.3) Passa no ponto (-2,5) e no ponto (2,-1).

5) Escreve a equação das retas r, s e t que se encontram representadas no referencial ortogonal monométrico.



6) Uma empresa presta serviços de entrega e de montagem de mobiliário. O tarifário da empresa é o seguinte:

- 30€ pela montagem;
- $2{,}5$€ por cada quilómetro do espaço percorrido até ao local de entrega.

6.1) Seja f a função que a cada x faz corresponder o custo total a pagar pelo cliente e em que x representa o número quilómetros percorridos até ao local da entrega.

6.1.1) Escreve a expressão algébrica correspondente a $f(x)$.

6.1.2) Um serviço foi prestado a um cliente tendo sido percorridos $12km$. Quanto pagou o cliente?

6.1.3) Um cliente pagou 50€ pela montagem e entrega dos móveis. Determina o espaço percorrido até ao local de entrega dos móveis.

6.2) Admite que o custo de montagem sofre um aumento de 5%. Seja agora g a função que a cada x faz corresponder o custo total a pagar pelo cliente. Calcula $g(18)$ e explica o seu significado no contexto apresentado.

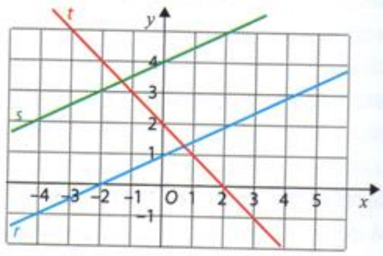
Anexo X – Relação entre declive e paralelismo de duas retas. Tarefas do manual.

3 Considera as retas dadas pelas seguintes equações:

$r: y = 5x + 2$ $s: y = -3x + 2$ $t: y = 3x + 5$ $u: y = -3x + 5$

Indica possíveis pares de retas paralelas que se podem formar com as retas dadas.

7 No referencial ortogonal e monométrico da figura encontram-se representadas as retas r, s e t.
Indica as retas que têm o mesmo declive. Justifica.

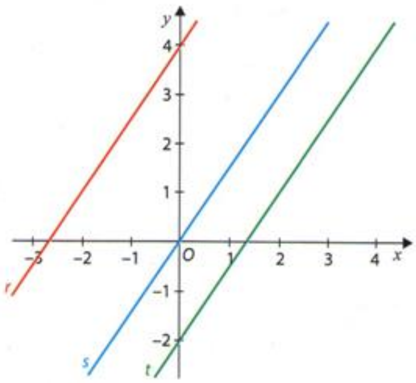


8 Na figura estão representadas as retas paralelas r, s e t, que representam graficamente três funções, f, g e h.

Sabe-se que:

- a função g é definida algebricamente por $g(x) = \frac{3}{2}x$;
- a reta r passa no ponto $(0, 4)$;
- a reta t passa no ponto $(0, -2)$.

Determina uma expressão algébrica para cada uma das funções f e h. Explica o teu raciocínio.



Anexo XI – Trabalho de casa - aula 1 - 13 Abril de 2015

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves **8.º Ano**

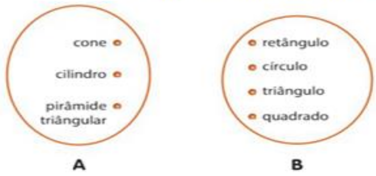
Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___ | Data: ___/ ___/ ___

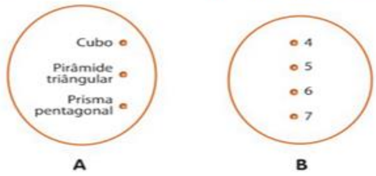
1)

1.1) Em cada alínea estabelece a correspondência indicada entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B.

a) Correspondência: sólido e base do sólido

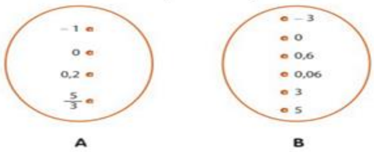


b) Correspondência: sólido e nº de faces



c) Correspondência: cidade e monumento

d) Correspondência: um nº e o triplo de um nº



1.2) Quais das correspondências anteriores são funções? Justifica.

1.3) Indica o domínio e o contradomínio das correspondências que são funções.

1.4) Completa:

1.5) *Uma correspondência em que* ……………… ………………………
…………… ……… ……… …
…………………………………………………………………………………
…………………………….*chama-se* ***função***.

1.6) Alguma das funções dadas é numérica de variável numérica? Justifica.

2) A tabela seguinte representa a função f que, a cada número, faz corresponder 50% desse número.

2.3) Completa a tabela.

x	32	80	
y			55

2.4) Indica o domínio e o contradomínio desta função.

2.5) Indica a imagem de 14 e $f(80)$

3) Representa as funções seguintes na forma canónica.

3.3) $h(x) = 8x - 3x - 2 - 8$

3.4) $i(x) = 2 + 6 \times (0{,}5x - 2) - 2(1 - 3x)$

3.5) $j(x) = (5 - 9x) - (-2x + 12)$

3.6) $k(x) = \frac{5}{4} \times (8 - 2x)$

Anexo XII – Trabalho de casa- aula 2 - 15 Abril de 2015

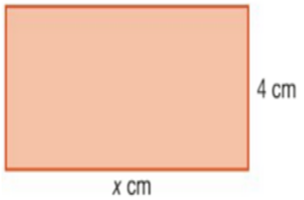
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves **8.º Ano**

Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___ | Data: ___/ ___/ ___

1) Considera o retângulo da figura ao lado cujo comprimento é dado em função da variável positiva x. Seja $p(x)$, **o perímetro**, em centímetros, do retângulo em função de x.

1.1) Escreve a expressão algébrica que define a função p.



1.2) Completa a tabela.

x	2	4	10	16
$p(x)$				

1.3) Determina o valor de x tal que $p(x)$ é 88.

1.4) Considera a função que a cada valor de x faz corresponder a **área**, em centímetros quadrados, do retângulo dado. Escreve a expressão algébrica da função e justifica que se trata de uma função linear.

1.5) Representa graficamente a função definida em 1.4.

1.6) Determina o valor de x para o qual a medida do perímetro do retângulo é igual à medida da sua área. Que característica tem esse retângulo?

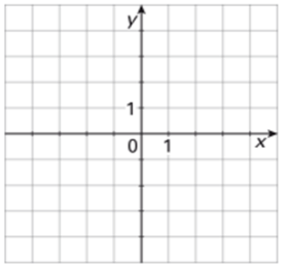
2) Representa graficamente as funções lineares f, g, h e i no referencial apresentado, sabendo que:

2.1) A reta que representa o gráfico de f tem declive $\frac{1}{2}$.

2.2) A reta que representa o gráfico de g tem declive 0 e passa pelo ponto de coordenadas $(2,0)$.

2.3) $h(-1) = -3$.

2.4) A imagem de 1 por i é -2.



Anexo XIII – Trabalho de casa- aula 3 - 20 Abril de 2015

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves **8.º Ano**

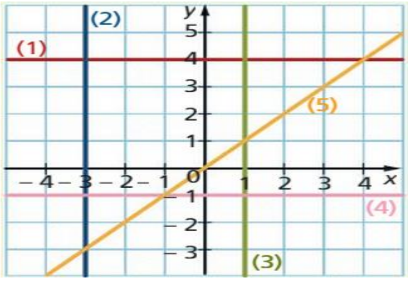
Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ **N.º:** ___ **Turma:** ___ **Data:** ___/ ___/ ___

1) Desenha num referencial ortogonal monométrico, as retas de equações:

•$x = 2$ •$y = 3$ •$y = -1$ • $x = -3$

2) Escreve as equações das retas que estão representadas no referencial.



3) Considera as expressões algébricas das seguintes funções.

$y = -3x;$ $y = -3x - 4;$ $y = 3x;$ $y = 3x + 2;$

3.1) Constrói a representação gráfica de cada uma das funções, no mesmo referencial ortogonal e monométrico.

3.2) Indica qual o de declive e a ordenada na origem de cada uma das funções.

3.3) Indica quais das retas são funções lineares e em que quadrantes se encontram os gráficos de cada uma delas. Explica a tua resposta.

Anexo XIV – Questão de aula n.º5

Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves | 8.º Ano

Escola Secundária Dona Luísa de Gusmão

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/ ___/ ___

Questão de aula nº5.

1) Considera a função dada pela expressão $f(x) = -2x - 1$ e as seguintes representações gráficas de funções.

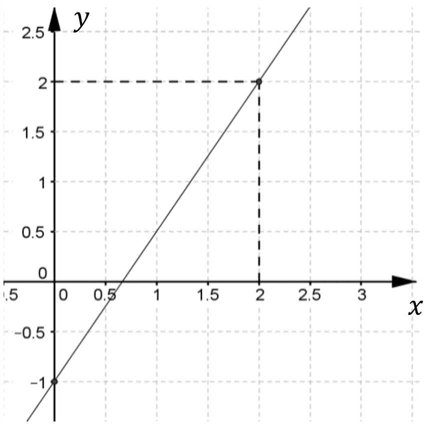


Gráfico I

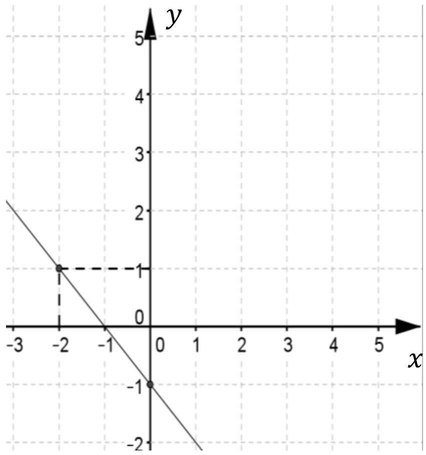


Gráfico II

1.1) Explica por que razão nenhum dos gráficos representa a função f.

1.2) Escreve uma equação da reta representada no gráfico II.

1.3) Representa graficamente a função f.

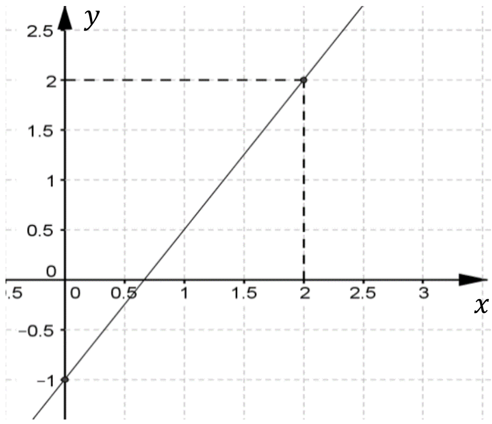
1.4) Escreve uma equação da reta paralela à reta do gráfico de f e que passa no ponto de coordenadas (2,-1).

2) Considera a função linear g que passa pelo ponto $(-2, 7)$ e determina a sua expressão algébrica.

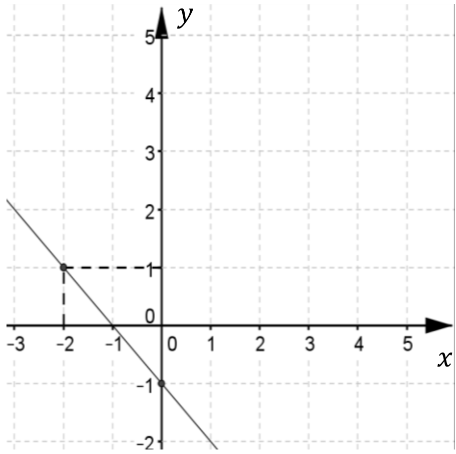
Anexo XV- Guião de Entrevista

<u>Questão de aula nº5.</u>

1) Considera a função dada pela expressão $f(x) = -2x - 1$ e as seguintes representações gráficas de funções.



<u>Gráfico I</u>



<u>Gráfico II</u>

1.1) Explica por que razão nenhum dos gráficos representa a função f.

Miguel:
- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreveste a tua resposta?
- Que ponto é que está mal, no gráfico I e no gráfico II? Porquê? Como fizeste para tirar essa conclusão?
- É apenas esse ponto que está mal marcado no gráfico I? E no gráfico II? Porquê?
- Consegues encontrar outros?
- E o ponto (2,2) pertence à reta que representa a função f ou não? Porquê?
- Que tipo de função está representado no gráfico I? E no gráfico II? E na função f? Porquê?
- Porque é que consegues dizer que são funções afins, se em duas representações tens os gráficos e na outra tens uma expressão?

Pedro:
- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreveste a tua resposta?
(Irei mostrar ao aluno o gráfico I, com uma escala unitária no referencial.)
- Então e este, é a representação gráfica de f ou do gráfico I? Porquê?
- Como é que fazes para saber se o gráfico é a representação gráfica da função f ou não?
- Que tipo de função é o gráfico I? E o gráfico II? E o a função? Porquê?
- Porque é que consegues dizer que são funções afins, se em duas representações tens os gráficos e na outra tens uma expressão?
- Porque que é que o declive e a ordenada na origem no gráfico II são diferentes?
- Qual é o declive da reta representada n gráfico II? Porquê?

- E o declive da função f? Porquê?
- Qual é a ordenada na origem da reta representada no gráfico II? E a ordenada na origem da função f? Porquê?
- Então porque é que nenhum dos gráficos é a representação gráfica de f?

Francisca:

- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreves-te a tua resposta?
- O que queres dizer com "os gráficos não coincidem co a expressão dada"? Porquê
- Qual é a diferença entre o gráfico que representa a função f e o gráfico I?
- Qual é a diferença entre o gráfico que representa a função f e o gráfico II?
- Que tipo de função é o gráfico I? E o gráfico II? E o a função? Porquê?
- Porque é que consegues dizer que são funções afins, se em duas representações tens os gráficos e na outra tens uma expressão?
- Porque que é que o declive e a ordenada na origem no gráfico II são diferentes?
- Qual é o declive da reta representada n gráfico II? Porquê?
- E o declive da função f? Porquê?

Joana:

- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreveste a tua resposta?
- O que queres dizer com "as expressões representadas são diferentes"? Que expressões?
- Que diferença existe então entre as expressões?
- Qual é a diferença entre o gráfico que representa a função f e o gráfico I?
- Qual é a diferença entre o gráfico que representa a função f e o gráfico II?
- Que tipo de função é o gráfico I? E o gráfico II? E o a função? Porquê?
- Porque é que consegues dizer que são funções afins, se em duas representações tens as representações gráficas e na outra tens uma expressão?
- Qual é o declive e a ordenada na origem da reta representada no gráfico II? Porquê?
- E o declive da função f? Porquê?

Rui:

- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreveste a tua resposta?
- O que é a função x? E a y?
- Que reta está a representar a função x? E a função y?
- A função f não é uma reta? Porquê?
- Que funções conheces que representam retas?

1.2) Escreve uma equação da reta representada no gráfico II.

Miguel:
- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreves-te a tua resposta?
- E se te fosse pedido para determinar o b sem efetuar cálculos, como farias?
- É possível?
- E se a reta passar pelo ponto (-2,1) e pelo ponto (0,-2)? Consegues determinar o b? E sem efetuar cálculos para determinar o b?

Pedro:
- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreves-te a tua resposta?
- O que representa o a?
-Como é que começaste por determinar o declive?
-Do que está riscado o que fizeste primeiro? Porque é que riscaste?
- E se te fosse pedido para determinar o b sem efetuar cálculos, como farias?
- É possível?
- E se a reta passar pelo ponto (-2,1) e pelo ponto (0,-2)? Consegues determinar o b? E sem efetuar cálculos para determinar o b?

Francisca:

- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreves-te a tua resposta?
- De onde vêm estes dois pontos?
- O que pretendias determinar com este cálculo (declive)?
- Como devemos determinar o declive?
- O que representa f(x)=-2-1, o que queria dizer quando escreves-te isto?
- De onde vem o –1?
- Como podes determinar o b? Porquê?
- E se tivesses de justificar toda a questão com cálculos como procederias?

Joana:

- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreveste a tua resposta?
- Como obtiveste estes pontos?
- Como se devem escrever as coordenadas de um ponto?
- O que pretendias calcular com o cálculo (declive)? E está correto? Porquê?
- Se te fosse pedido para determinar o b sem recorrer a cálculos, seria possível fazer? Porquê? Como farias?
- A equação que escreves-te do gráfico II, corresponde à representação gráfica que tens no gráfico II? Porquê?

Rui:

- Consegues, por favor explicar o que pensaste quando escreveste a tua resposta?
- O que pretendias dizer com f(x)=-2x1?
- De que tipo é a função representada no gráfico II? Porquê?
- Que tipo de expressão tem essa função?
- Como deves proceder para a determinar?

1.3) Representa graficamente a função f.

Miguel:
- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua representação gráfica da função f?
- Porque é que fizeste uma tabela?
- Porque é que calculaste 2 pontos?
- Que referencial tens representado?
- Qual é o eixo do x? E o do y?

- E se a expressão de f fosse f(x)=-2x+1, a representação gráfica era a mesma? Porquê? O que era diferente?
- E se fosse f(x)=2x-1?

Pedro:
- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua representação gráfica da função f?
- Porque é que fizeste uma tabela?
- Consegues explicar que cálculos são os que se encontram à direita?
- Como fizeste para marcar os pontos no referencial?
- Que referencial tens representado?
- Qual é o eixo do x? E o do y?
- E se a expressão de f fosse f(x)=-2x+1, a representação gráfica era a mesma? Porquê? O que era diferente?
- E se fosse f(x)=2x-1?

Francisca:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua representação gráfica da função f?
- Porque é que fizeste uma tabela?
- Como é que construir-te o referencial?
- Que referencial tens representado?
- Qual é o eixo do x? E o do y?
- Como marcaste os pontos?
- E se a expressão de f fosse f(x)=-2x+1, a representação gráfica era a mesma? Porquê? O que era diferente?
- E se fosse f(x)=2x-1?

Joana:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua representação gráfica da função f?
- Porque é que fizeste uma tabela?
- Porque é que calculaste 2 pontos?
- Que referencial tens representado?
- Qual é o eixo do x? E o do y?
- E se a expressão de f fosse f(x)=-2x+1, a representação gráfica era a mesma? Porquê? O que era diferente?
- E se fosse f(x)=2x-1?

Rui:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua representação gráfica da função f?
- Que pontos são os que estão representados no teu referencial?
- Como foram calculados?

- As funções passam no ponto (0,0)? Porquê?

1.4) Escreve uma equação da reta paralela à reta do gráfico de f e que passa no ponto de coordenadas (2,-1).

Miguel:

- Porque é que deixaste a pergunta sem qualquer resposta?
- Consegues resolver a questão agora? Podes explicar?
- Que dados tens, nesta questão, que te poderiam ter ajudado a resolvê-la?
- O que têm em comum duas retas paralelas?
- Que tipo de expressão algébrica vai corresponder o gráfico desta reta?
- Como podes determinar a ordenada na origem?

Pedro:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- E se a reta passasse pelo ponto (1,-1), qual seria a diferença?
- E se a reta fosse paralela à reta de equação y= 3x e continuasse a passar pelo ponto (2,-1)?

Francisca:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- Quanto é 2 a dividir por -1?
- Que dados consegues identificar nesta questão?
- O que têm em comum duas retas paralelas?
- Que tipo de expressão algébrica vai corresponder o gráfico desta reta?
- Como podes determinar a ordenada na origem?

Joana:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- Que dados consegues identificar nesta questão?
- O que têm em comum duas retas paralelas?
- Que tipo de expressão algébrica vai corresponder o gráfico desta reta?
- Como podes determinar a ordenada na origem?
- E se a reta paralela ao gráfico de f passar pelo ponto (0,2), qual será o valor de b?
- E se a reta fosse paralela à reta de equação y= 3x e continuasse a passar pelo ponto (2,-1)?

Rui:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- Consegues resolver a questão agora? Podes explicar?
- Que dados tens, nesta questão, que te poderiam ter ajudado a resolvê-la?
- Que tipo de equação terá a reta r? Porquê?
- O que têm em comum duas retas paralelas?
- Que tipo de expressão algébrica vai corresponder o gráfico desta reta?

- Como podes determinar a ordenada na origem?

2) Considera a função linear g que passa pelo ponto $(-2, 7)$ e determina a sua expressão algébrica.

Miguel:

- Porque é que deixaste a pergunta sem qualquer resposta?
- Consegues resolver a questão agora? Podes explicar?
- Que dados tens, nesta questão, que te poderiam ter ajudado a resolvê-la?
- E se a função g passar pelo ponto (1,3) em vez de (-2,7), como fica a expressão algébrica?
- E o seu gráfico fica igual ou não?

Pedro:

- Consegues explicar a tua resposta?
- Porque é que foste dividir 7 por 2?
- E se a função g passar pelo ponto (1,3) em vez de (-2,7), como fica a expressão algébrica?
- E o seu gráfico fica igual ou não?

Francisca:

- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- Porque é que escreves-te y=ax?
-E o que queres dizer com 7=a×-2? Consegues determinar o a?
- Como é que fazes quando queres determinar a expressão algébrica de uma função linear? Porquê?
- Qual é a sua ordenada na origem?
- E se a função g passar pelo ponto (1,3) em vez de (-2,7), como fica a expressão algébrica?
- E o seu gráfico fica igual ou não?

Joana:

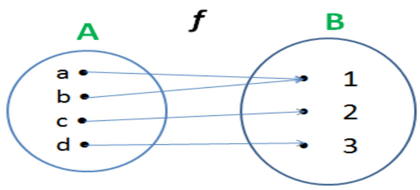
- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- Porque é que escreves-te y=ax?
- E o que queres dizer com 7=ax-2? E 7=-2x? Que operação realiza o -2 em relação a x? Então para isolar o x o que vai acontecer com o -2?
- Como é que fazes quando queres determinar a expressão algébrica de uma função linear? Porquê?
- Qual é a sua ordenada na origem?
- E se a função g passar pelo ponto (1,3) em vez de (-2,7), como fica a expressão algébrica?
- E o seu gráfico fica igual ou não?

Rui:

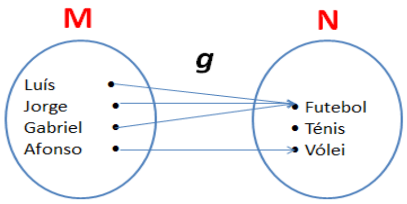
- Consegues, por favor explicar o que fizeste para construir a tua resposta?
- Que dados tens, nesta questão, que te poderiam ter ajudado a resolvê-la?
- Como deves escrever a expressão algébrica de uma função?
- E se a função g passar pelo ponto (1,3) em vez de (-2,7), como fica a expressão algébrica?
- E a sua representação gráfica fica igual ou não?

Anexo XVI – Apoio da Aula 1

Diapositivo 1



Domínio é o conjunto
A$= \{a, b, c, d\}$.
Contradomínio é o conjunto das imagens $D'f = \{1,2,3\}$.
Conjunto de chegada
B $= \{1,2,3\}$.

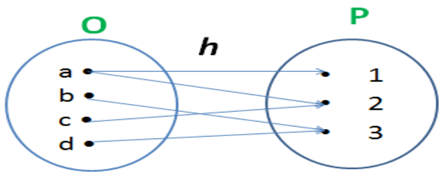


Domínio é o conjunto
M$= \{Luís, Jorge\ Gabriel, Afonso\}$.
Contradomínio é o conjunto das imagens $D'g = \{Futebol, Vólei\}$.
Conjunto de chegada da função g
N $= \{Futebol, Vólei, Ténis\}$.

1

Diapositivo 2

Funções:



Dos três diagramas anteriores, quais representam funções ou não?

f e g representam funções.
h não representa uma função, pois um objeto não pode ter duas imagens.

2

Diapositivo 3

Funções

- Dados dois conjuntos *A* e *B*, chama-se função f definida em *A* com valores em *B*, a uma correspondência que a cada elemento de *A* faz corresponder um e um só elemento de *B*. Escreve-se $f: A \to B$.
- Conjunto *A*: chama-se domínio da função e representa-se por Df. Aos elementos deste conjunto chamam-se objetos.
- Conjunto *B*: é o conjunto de chegada. Este conjunto contém o conjunto das imagens dos objetos de *A* por *f*, conjunto este que se chama contradomínio da função e representa-se por $D'f$.
- Assim a cada elemento x de *A* corresponde um e um só elemento $f(x)$ de *B*.

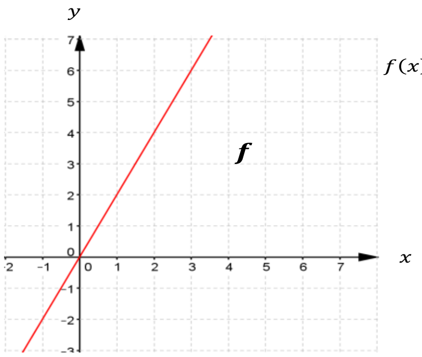
$$f: A \to B$$
$$x \to f(x) = y$$

- x é a variável independente e y é a variável dependente.
- Quando Df é um conjunto de números a função diz-se de variável numérica.
- Quando o conjunto de chegada é um conjunto de números a função diz-se numérica.

3

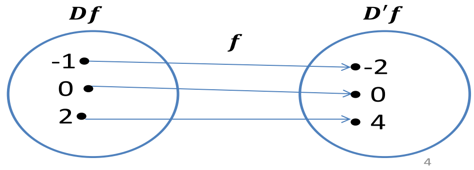
Diapositivo 4

De que diferentes formas és capaz de representar uma função??



Um referencial cartesiano xoy diz-se ortogonal monométrico se os eixos são perpendiculares e a unidade de medida é mesma nos dois eixos.

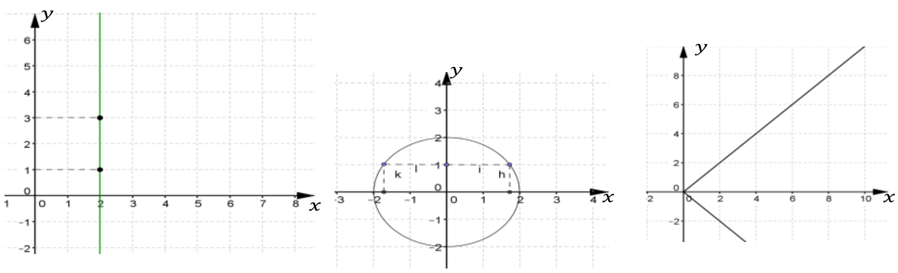
x	-1	0	2
$f(x)$	-2	0	4



4

Diapositivo 5

Quais dos seguintes gráficos representam funções?



5

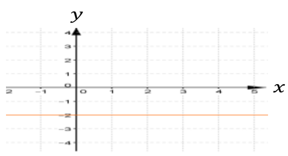
Diapositivo 6

Que funções já conheces?

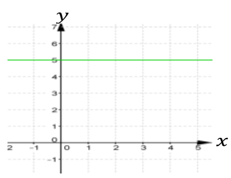
Função constante:
Uma função constante f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = b$ (ou $y = b$) em que b representa um número.

Exemplos:
$h(x) = -2$ ou $y = -2$, é uma função constante. A imagem de qualquer número real é sempre igual a -2.

x	y
-3	-2
0	-2
2	-2



$i(x) = 5$, é uma função constante. A imagem de qualquer número real é sempre igual a 5.



x	y
-2	5
0	5
1	5

6

Diapositivo 7

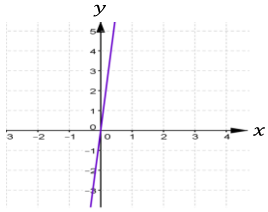
Que funções já conheces?

Função Linear:

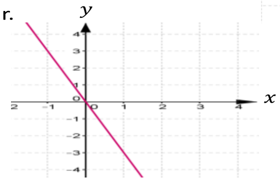
Uma função linear f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ (ou $y = ax$), em que a representa uma constante. A a chama-se coeficiente da função linear.

Exemplos:
$f(x) = 12x$, é uma função linear.
12 é o coeficiente da função.

x	y
-1	-12
0	0
1	12



$g(x) = -3x$, é uma função linear.
-3 é o coeficiente da função.



x	y
-1	3
0	0
1	-3

7

Diapositivo 8

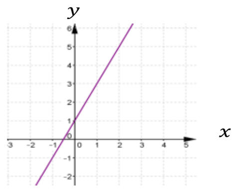
Que funções já conheces?

Função Afim:

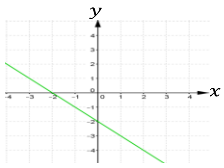
Uma função afim f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$) em que a e b representam números. Ao valor de a chama-se coeficiente de x e a b termo independente.

Quando uma função afim está escrita na forma $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$), diz-se que está na forma canónica.

x	y
-1	-1
0	1
1	3



Exemplos:
$f(x) = 2x + 1$, 2 é o coeficiente de x e 1 é o termo independente.



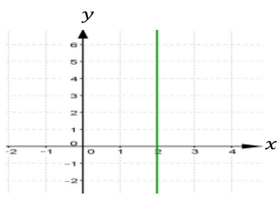
$j(x) = -x - 2$, -1 é o coeficiente de x e -2 é o termo independente.

x	y
-3	1
0	-2
1	-3

8

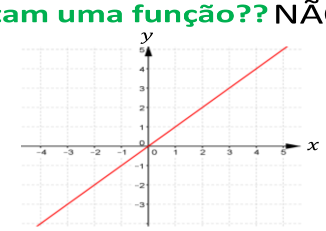
Diapositivo 9

Será que todas as retas representam uma função?? NÃO



$x = 2$

x	y
2	-1
2	0
2	1



$y = x$

x	y
-1	-1
0	0
1	1

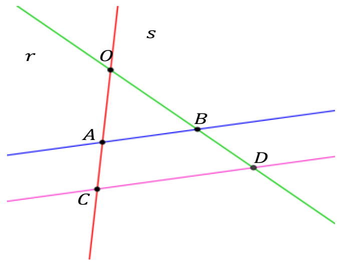
A reta vermelha representa uma função, pois a cada objeto apenas corresponde uma e só uma imagem.

9

Anexo XVII – Apoio da Aula 2

Diapositivo 1

Funções:



Teorema de Tales:

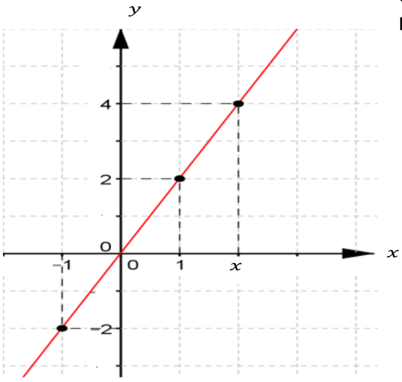
Se duas retas r e s são concorrentes num ponto O e AB e CD são retas paralelas que não passam em O, então

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

1

Diapositivo 2

Funções:



Exemplo1:
Como podemos descobrir a abcissa do ponto $(x,4)$?

$$\frac{4}{2} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow 4 \times 1 = 2 \times x \Leftrightarrow$$
$$4 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

2

Diapositivo 3

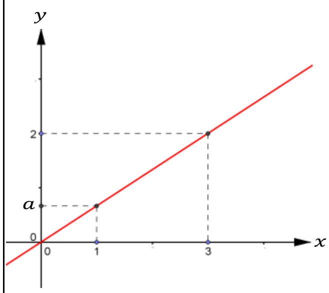
Vamos praticar

- Tarefa 2: ex. 1 e 2
- (20 minutos)

3

Diapositivo 4

Exemplo 2: Considera a reta r representada no referencial cartesiano ortogonal e monométrico. A reta contém a origem do referencial e o ponto $A(3{,}2)$. Utilizando o teorema de Tales determina a equação da reta r.



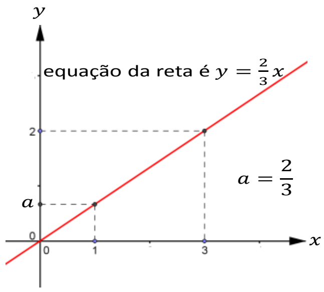
A equação de uma reta que passa na origem é da forma $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}$. Pelo teorema de Tales tem-se:

$$\frac{3}{1} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Logo a equação da reta é $y = \frac{2}{3}x$.

4

Diapositivo 5



- ✓ O coeficiente a da função linear f é igual à ordenada do ponto do gráfico de abcissa 1. Assim $a = f(1)$.
- ✓ Qualquer reta não vertical que passa pela origem do referencial é gráfico de uma função linear f do tipo $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$.
- ✓ A equação da reta obtida é a expressão analítica da função linear representada graficamente.
- ✓ As coordenadas de qualquer ponto da função f vão ser do tipo $(x, f(x))$.

- ➢ Ao valor de ***a*** dá-se o nome de **declive** da reta.
- ➢ O **declive** é igual à ordenada do ponto de abcissa 1 e à constante de proporcionalidade entre a ordenada e a abcissa de qualquer ponto.

5

Diapositivo 6

Vamos descobrir!

Vamos considerar as funções lineares $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. O que acontece para

- $a = 6$
- $a = 13$
- $a = 2$
- $a = 0{,}8$
- $a = \frac{7}{3}$

- $a = -2$
- $a = -10$
- $a = -3$
- $a = 0$

Então o que podemos concluir acerca da influência do declive no gráfico da função?

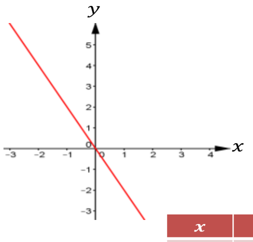
6

Diapositivo 7

O que é na verdade o declive??

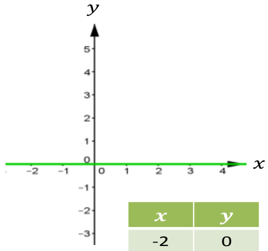
Considera a função linear $f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$. O que observas no gráfico da função se $a = -2$, $a = 0$, $a = 3$.

$f(x) = -2x$



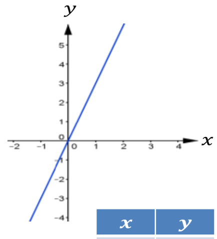
x	y
-1	2
0	0
2	-4

$f(x) = 0x$



x	y
-2	0
0	0
3	0

$f(x) = 3x$



x	y
-1	-3
0	0
1	3

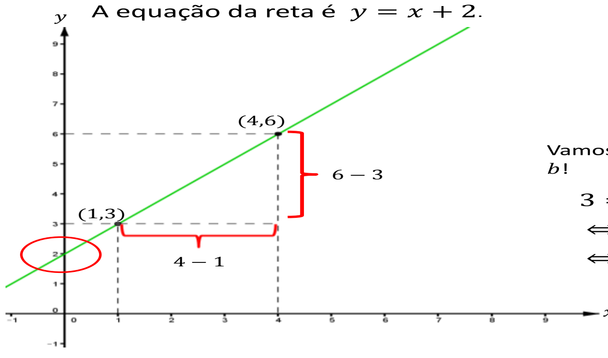
7

Anexo XVIII – Apoio da Aula 3

Diapositivo 1

Vamos descobrir a equação da reta.

A equação da reta é $y = x + 2$.



$a = \frac{(6-3)}{(4-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{3}{3}$

$\Leftrightarrow a = 1$

$y = x + b$

Vamos descobrir o valor de b!

$3 = 1 + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 1 = b$

$\Leftrightarrow b = 2$

1

Diapositivo 2

O que podemos concluir?

- Os gráficos de funções afins são retas não verticais da forma $y = ax + b$, onde a designa o declive da reta e b a ordenada na origem.
- Seja r uma reta e $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos pertencentes a essa reta. O declive da reta r é igual a $\frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}$.

2

Diapositivo 3

Vamos agora considerar as funções afins do tipo $f(x) = ax + b$. Se a é o declive da reta, vamos fixar $a = 1$, o que representa b?

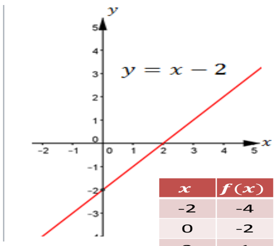
Vamos observar as seguintes funções: $f(x) = x + b$
- $b = -2$
- $b = -6$
- $b = -3$
- $b = 1{,}2$
- $b = 4$
- $b = 7$
- $b = 0$

3

Diapositivo 4

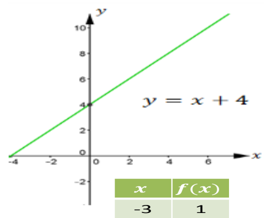
Vamos agora considerar as funções afins do tipo $f(x) = ax + b$. Se a é o declive da reta, vamos fixar $a = 1$, o que representa b?
O que podes concluir?

$b = -2$



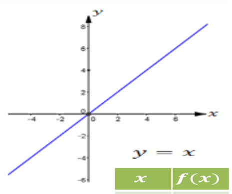
x	$f(x)$
-2	-4
0	-2
3	1

$b = 4$



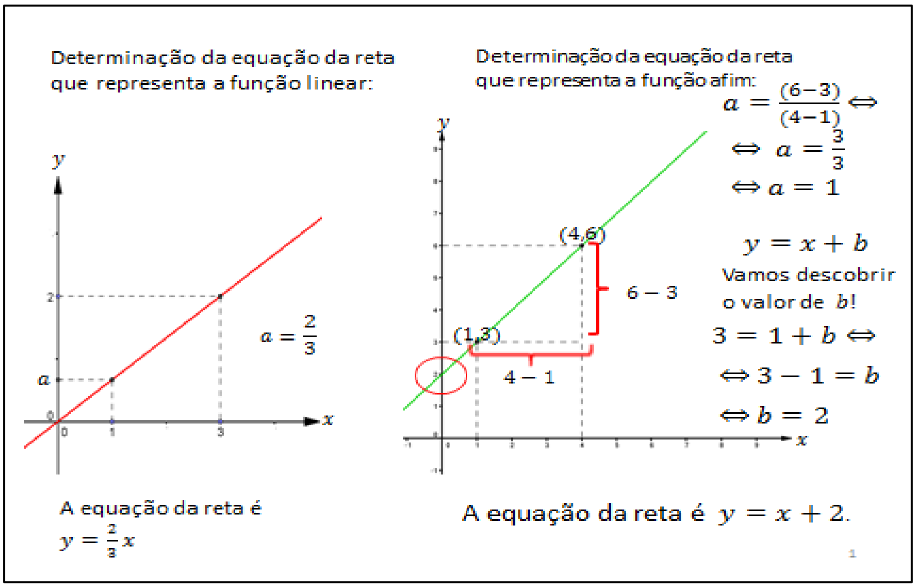
x	$f(x)$
-3	1
0	4
4	8

$b = 0$



x	$f(x)$
-1	-1
0	0
2	2

Anexo XIX – Apoio da Aula 4

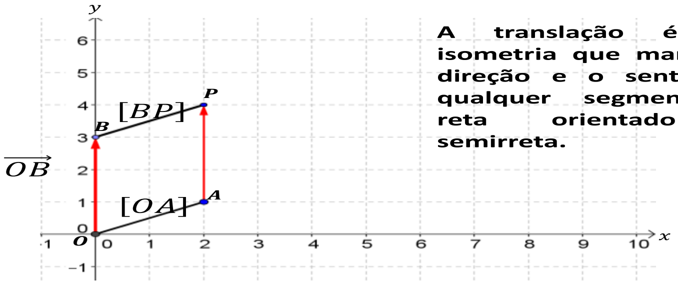


Anexo XX – Apoio da Aula 5

Diapositivo 1

Funções:

Exemplo: Considera no referencial ortogonal e monométrico da figura o segmento $[OA]$, onde O(0,0) e A (2,1), e o vetor $\overrightarrow{OB}$ que tem coordenadas (0,3). Efetua a translação do segmento pelo vetor $\overrightarrow{OB}$.

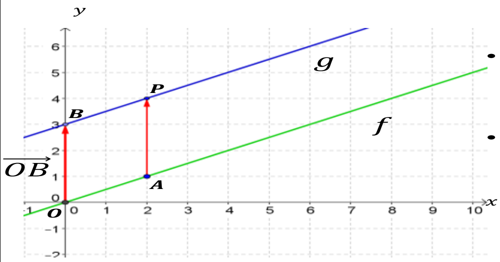


A translação é uma isometria que mantém a direção e o sentido de qualquer segmento de reta orientado ou semirreta.

1

Diapositivo 2

Considera agora as funções f e g, cujos gráficos contêm os segmentos segmentos $[OA]$ e $[BP]$, onde $f(x) = \frac{1}{2}x$ e $g(x) = f(x) + 3$, ou seja $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

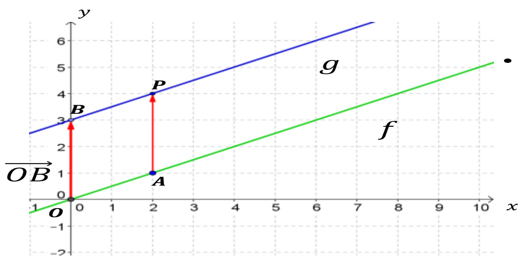


- O é a origem do referencial e B tem de coordenadas (0,3).
- B é o ponto que resultou de uma translação do ponto O associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$.
- A imagem do ponto $A(2,1)$ pela mesma translação é o ponto $P(2,4)$ que pertence ao gráfico de g , então $P = A + \overrightarrow{OB}$ onde $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AP}$.

2

Diapositivo 3

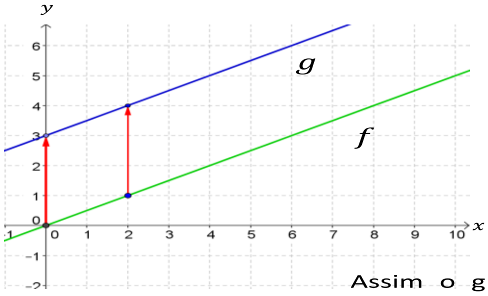
O que podemos concluir?



- Qualquer ponto do gráfico de g pode ser obtido de um ponto do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$.
- Logo, o gráfico de uma função definida por $g(x) = f(x) + b$ obtém-se do gráfico $f(x)$ por uma translação associada ao vetor definido pelo segmento orientado com origem no ponto de coordenadas (0,0) e extremidade $(0, b)$.

3

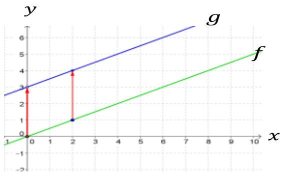
Diapositivo 4



Assim o gráfico de uma função afim $g(x) = ax + b = f(x) + b$ obtém-se a partir do gráfico da função $f(x) = ax$ através de uma translação.

4

Diapositivo 5



Vamos ver com mais atenção!

Os gráficos das funções f e g são duas retas paralelas.

O que têm em comum as duas funções?

Ambas as funções têm o mesmo declive.

$f(x) = ax \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x$ e

$g(x) = f(x) + 3 \Leftrightarrow$

$g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

O que podemos conclui?

- Se duas retas não verticais são paralelas, então têm o mesmo declive.
- Se duas retas não verticais têm o mesmo declive, então são paralelas.

5

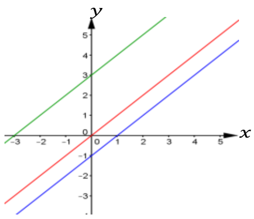
Diapositivo 6

Relação entre declive e paralelismo

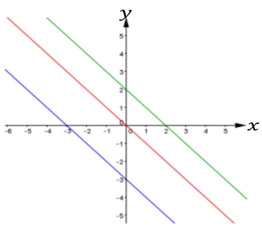
Duas retas não verticais são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

Exemplos:

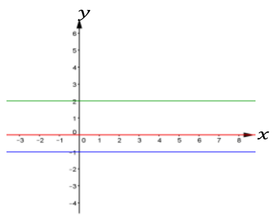
Retas Paralelas de Declive 1



Retas Paralelas de Declive -1



Retas Paralelas de Declive 0



6

Anexo XXI – Autorizações

Ex.ª Sra. Professora Laurinda Pereira,

Diretora do Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves

Eu, Ana Alexandra Gonçalves José, aluna do Mestrado em Ensino da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, estando a realizar a minha intervenção de prática letiva supervisionada na turma A do 8.º ano de escolaridade, no ano letivo 2014/2015, sob a orientação da professora Helena Fonseca, venho, por este meio, solicitar autorização para desenvolver, neste âmbito, um trabalho de investigação que integrará o meu relatório final.

O principal objetivo deste trabalho é compreender as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins. Para a sua realização, necessito recolher dados através da gravação áudio de aulas onde se discutam a resolução das tarefas acerca de gráficos de funções afim e da realização de entrevistas a alunos.

O desenvolvimento desta investigação não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os participantes, estando garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato dos alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do Mestrado.

Irei, ainda, proceder ao pedido de autorização dos Encarregados de Educação dos alunos para a referida recolha de dados.

Agradeço, desde já, a colaboração,

Lisboa, 16 de Março de 2015

_

Exmo. Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Ana Alexandra Gonçalves José, pretendo desenvolver um trabalho de investigação, no ano letivo 2014/2015, no âmbito do relatório da prática supervisionada para obtenção do Mestrado em Ensino da Matemática que me encontro a concluir no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. O principal objetivo deste trabalho é compreender as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas envolvendo gráficos de funções afins e, para sua realização, necessito recolher dados através da gravação áudio de aulas onde se discutam a resolução das tarefas acerca de gráficos de funções afim e da realização de entrevistas a alunos. O desenvolvimento do trabalho não interfere com o normal funcionamento das atividades letivas e não traz qualquer prejuízo para os alunos. Ao abrigo da Lei 67/98 de 26 de Outubro, será garantida a confidencialidade dos dados recolhidos e o anonimato de todos os alunos em posteriores divulgações da investigação realizadas no âmbito do Mestrado.

Solicito, assim, autorização para implementar o trabalho de investigação anteriormente descrito através do preenchimento da declaração em anexo.

Agradeço, desde já, a sua colaboração,

Lisboa, 16 de Março de 2015

A Professora

____

AUTORIZAÇÃO

Eu,____, encarregado de educação do(a) aluno(a) _______________________________________, n.º ____, da turma A do 8.º ano, declaro que tomei conhecimento dos objectivos do trabalho de investigação desenvolvido pela Ana José no âmbito do seu trabalho de Mestrado e da necessidade da respectiva recolha de dados. Autorizo a participação do meu educando com a garantia do respectivo anonimato.

__________________, ____/03/2015

O(a) Encarregado(a) de Educação

____